

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ І ТРАНСПОРТУ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ЩОДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТУ  
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
**«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ У ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ»**  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ  
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ  
275 – «ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ  
(ЗА ВИДАМИ)»  
ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЮ «БАКАЛАВР»  
(У ТОМУ ЧИСЛІ СКОРОЧЕНИЙ ТЕРМІН НАВЧАННЯ)

КРЕМЕНЧУК 2016

Методичні вказівки щодо виконання курсового проекту з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів усіх форм навчання зі спеціальності 275 – «Транспортні технології (за видами)» освітнього ступеню «бакалавр» (у тому числі скорочений термін навчання)

Укладачі д.т.н., проф . М. М. Мороз,  
к.т.н., доц. В. Г. Загорянський,  
асист. І. О. Кузев

Рецензент к.т.н., доц. О. Д. Коноваленко

Кафедра транспортних технологій

Затверджено методичною радою КрНУ імені Михайла Остроградського

Протокол № \_\_\_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 р.

Голова методичної ради \_\_\_\_\_ проф. В. В. Костін

## **ЗМІСТ**

Вступ.....	4
1 Організація процесу написання курсової роботи з навчальної дисципліни «Дослідження операцій у транспортних системах» .....	6
1.1 Структура курсової роботи, вибір варіанта.....	6
1.2 Оформлення курсової роботи .....	7
1.3 Захист курсової роботи .....	11
1.4 Критерії оцінювання виконання курсової роботи.....	11
2 Методичні рекомендації щодо виконання практичної частини курсової роботи	12
Список літератури .....	34
Додаток А Приклади вихідних даних до курсової роботи .....	35
Додаток Б Зразок оформлення титульної сторінки .....	48
Додаток В Зразок оформлення аркуша ЗМІСТ .....	49
Додаток Г Приклад оформлення аркушів розв’язання завдань .....	50

Підготовка майбутнього спеціаліста до розв'язання проблем транспортних систем із урахуванням механізмів функціонування ринкової економіки, широкого впровадження дослідження операцій в усі сфери діяльності транспортних технологій здійснюється за допомогою навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах».

У зв'язку з цим навчальна дисципліна «Дослідження операцій в транспортних системах» охоплює методику аналізу і розрахунку транспортних процесів, що відбуваються в різних видах діяльності фахівців транспортних технологій, оцінювання стану та динаміки їхнього розвитку.

Курсова робота – це узагальнення, закріплення та розширення практичних навичок основ проектування й експлуатації великих і складних транспортних систем, управління транспортними процесами, методів аналізу стану, оцінки їхніх характеристик та ефективності.

Курсова робота повинна відображати рівень теоретичної та практичної підготовки студентів, ступінь опанування та уміння творчого використання матеріалу дисципліни, і має на меті допомогти студентам оволодіти методами та формами розв'язання практичних завдань з метою підвищення ефективного аналізу роботи транспортних систем у сучасних умовах ринкових відносин.

Виконання курсової роботи є формою контролю засвоєних студентами знань, що дозволяє систематизувати, поглибити, творчо застосувати їх у розв'язанні конкретних завдань, розвинути навички самостійної роботи.

Основні завдання курсової роботи:

- засвоєння та закріплення теоретичних знань студента;
- виявлення здатності студентів поєднувати отримані теоретичні знання під час розв'язання практичних завдань аналізу діяльності транспортних систем;
- уміння упроваджувати результати практичних рішень і розрахунків у практику роботи підприємств автомобільного транспорту.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

*знати:*

- різноманітні моделі лінійного програмування;
- основні принципи теорії масового обслуговування та методів динамічного програмування;

*уміти:*

- аналізувати, вивчати та відбирати необхідні стратегії, моделі, програмні засоби забезпечення аналізу і розрахунку транспортних систем;
- формулювати задачі лінійного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь та у вигляді нерівностей стосовно транспортних систем; здійснювати перехід від однієї форми задачі лінійного програмування до другої та навпаки;
- здійснювати розв'язання задач лінійного програмування згідно з алгоритмами розрахунку, розв'язати задачу оптимізації вантажопотоків;
- скласти оптимальні плани перевезень для різноманітних варіантів транспортних задач;
- використовуючи упорядковані структурні таблиці комплексів робіт, будувати сіткові графіки виконання комплексів робіт з визначенням критичних шляхів і можливих резервів часу для некритичних робіт, удосконалювати виконання комплексу робіт шляхом переміщення на графіку окремих робіт.

Методичні рекомендації мають на меті надання допомоги студентам у виконанні самостійної роботи і містять основні вимоги до змісту та оформлення курсової роботи, організації виконання, порядку захисту та критеріїв оцінювання.

# **1 ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ НАПИСАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ У ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ»**

## **1.1 Структура курсової роботи, вибір варіанта**

Матеріали курсової роботи розміщують у такій послідовності:

- титульна сторінка з обов'язковим зазначенням варіанта (додаток Б);
- зміст (додаток В);
- вступ (обсягом 2–3 сторінки), у якому обґрунтовується актуальність і практичне значення завдань курсової роботи, наводиться коротка характеристика методів їх розв'язання завдань (наведені, наприклад, в [6,11]).

У основному розділі наводиться послідовність розв'язання завдань курсової роботи.

Курсова робота включає виконання чотирьох завдань, які відповідають основним темам курсу і найбільш розробленим і застосовуваним методам розв'язання завдань дослідження операцій стосовно транспортних систем.

Завдання курсової роботи складено у варіантах. Приклади завдань до курсової роботи наведені у додатку А.

Свій варіант студент вибирає відповідно до свого номера за списком у журналі академічної групи.

Висновки (обсягом 1–2 сторінки) повинні містити стислі висновки до роботи (які задачі були розв'язані в основному розділі, за якими методами та як можна практично використовувати отримані результати в транспортній галузі).

Список використаних джерел наводять наприкінці роботи. Він має містити в порядку згадування в тексті або в алфавітному порядку перелік літературних джерел, які були використані у курсовій роботі.

Загальний обсяг текстової частини не повинен перевищувати 20 – 25 сторінок друкованого тексту на папері формату А4, включаючи список літератури.

Додатки не входять до нумерації сторінок, містять нумерацію літерами з правого боку рядка; на кожен додаток має бути посилання в тексті.

Графічна частина (додаток Г роботи). У графічній частині пропонується навести результати графічних побудов і розрахунків завдань роботи. Обсяг – 5 аркушів (зразки оформлення наведені у додатку Г). Цю частину пропонується подавати на аркушах формату А4 (книжкова орієнтація) з відповідним основним написом за міждержавним стандартом ГОСТ 2.104-2006 «Единая система конструкторской документации. Основные надписи», форма 2.

Креслення у графічній частині можуть виконуватися або звичайними засобами з дотриманням вимог ЕСКД, або, за наявності відповідних навичок, за допомогою графічних інструментів Microsoft Word.

## **1.2 Оформлення курсової роботи**

Текст пояснювальної записки курсової роботи набирають у текстовому редакторі Microsoft Word і роздруковують за допомогою принтера на одному боці аркуша білого паперу формату А4.

Поля аркуша мають бути таких розмірів: ліве поле – 25 мм, праве – 10 мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм.

Пояснювальна записка, яку складають, виконуючи курсову роботу, є текстовим документом і її слід виконувати відповідно до вимог стандартів ЕСКД (ГОСТ 2.105-95 «Единая система конструкторской документации. Общие требования к текстовым документам»).

Аркуш ЗМІСТ і аркуші додатків повинні мати рамку, виконану за міждержавним стандартом ГОСТ 2.104-2006 «Единая система конструкторской документации. Основные надписи», форма 2. Зразок оформлення аркушу ЗМІСТ наведений у додатку В, аркушів додатків (графічної частини) – у додатку Г.

Текст пояснювальної записки необхідно поділити на абзаци.

Шрифт тексту – Times New Roman, розмір – 14. На вкладниці «Абзац» встановити такі значення: «Отступ слева» – 0 см, «Отступ справа» – 0 см,

«Интервал перед» – 0 пт, «Интервал после» – 0 пт, «первая строка» – «Отступ» на 1,25 см. Интервал «междустрочный» – «Полуторный».

Робота починається з титульної сторінки (зразок оформлення якої наведений у додатку Б), підписаної студентом і керівником роботи. Далі розміщують аркуш ЗМІСТ, який відповідає заголовкам розділів і підрозділів у тексті пояснювальної записки (зразок оформлення наведений у додатку В), також підписаний студентом і керівником роботи.

Заголовки структурних частин роботи ЗМІСТ, ВСТУП, ЗАВДАННЯ I, II, ..., ВИСНОВКИ, СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ, ДОДАТОК А друкують великими літерами (шрифт – «начертание – полужирный», вирівнювання – «по центру»).

Номер завдання (римські цифри) ставлять після слова завдання, після номера крапку не ставлять, потім з нового рядка друкують заголовок завдання (великі літери, вирівнювання – «по центру»). Крапку в кінці заголовка розділу не ставлять.

Заголовки підрозділів (пунктів) друкують маленькими літерами (окрім першої великої) з абзацного відступу, вирівнювання – «по ширине», шрифт – «начертание – полужирный».

Підрозділи нумерують у межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу і порядкового номера підрозділу, між якими ставлять крапку. У кінці номера підрозділу ставлять крапку, наприклад: «3.2.» (третій підрозділ другого розділу). Потім у тому ж рядку наводять заголовок підрозділу. У кінці заголовка підрозділу ставлять крапку.

Кожну структурну частину роботи треба починати з нової сторінки, окрім розділів роботи, якщо останній аркуш попереднього розділу заповнений менш ніж на 3/4.

**Нумерацію** сторінок, розділів, підрозділів, пунктів, рисунків, таблиць, формул і т. п. подають арабськими цифрами без знаку №.

Першою сторінкою роботи є титульна, яку включають до загальної нумерації сторінок роботи. На титульній сторінці номер не ставлять, на



наступних сторінках номер розташовують з правого боку вгорі сторінки без крапки в кінці.

**Ілюстрації** (креслення, схеми, графіки) і таблиці необхідно подавати в роботі безпосередньо після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці. Ілюстрації і таблиці, розміщені на окремих сторінках роботи, включають до загальної нумерації сторінок. Ілюстрації позначають словом «Рис.» і нумерують послідовно в межах розділу.

Номер ілюстрації повинен складатися з номера розділу і порядкового номера ілюстрації, між якими ставиться крапка. Номер ілюстрації, її назва і пояснювальні підписи розміщують послідовно під ілюстрацією.

Наприклад:

Рис. 1.1. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

**Таблиці** розміщують після першого згадування про них в тексті. Кожна таблиця повинна мати назву, яка пишеться над таблицею (вирівнювання – «по центру»). Слово «Таблиця» та її назва починаються з великої літери.

Наприклад:

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків часових параметрів подій

У кожній таблиці заголовки граф повинні починатися з великої літери, підзаголовки – з маленької (якщо останні становлять єдине ціле).

		Назва таблиці					
Головка						Заголовки граф	
						Підзаголовки граф	
Графи (колонки)							

Таблиці нумерують послідовно (за винятком таблиць, поданих у додатках) у межах розділу.

**Формули** в роботі виконують у редакторі Microsoft Equation. Шрифт – за замовчуванням (Times New Roman, для символів і грецьких літер – Symbol).

Розміри шрифту: «Обычный» – 14 пт; «Крупный индекс» – 10 пт (70 %); «Мелкий индекс» – 7 пт (50 %); «Крупный символ» – 28 пт (200 %); «Мелкий символ» – 12 пт (90 %).

Формули розташовують з абзацного відступу («Абзац→первая строка:→Отступ→на: 1,25 см»), вирівнювання – «по ширине». Формули нумерують у межах розділу (якщо їх більше однієї). Номер формули складається з номера розділу і порядкового номера формули в розділі, між якими ставлять крапку. Номери формул пишуть біля правого поля аркуша (після того, як створена формула, установити курсор після неї та виконати «Абзац→Табуляция→Позиции табуляции: 17,5 см→Выравнивание: по правому краю», натиснути клавішу табуляції) на рівні відповідної формули в круглих дужках. Наприклад:

$$t_{p.n.}(i - j) = t_p(i), \quad (4.4)$$

У роботі потрібно використовувати єдині умовні позначення та скорочення, дотримуючись співвідношення поміж частинами, розділами, підрозділами відповідно до їх шифру, що надає логічного вигляду структурі роботи.

Узяті у друкованих виданнях дані та цитати повинні мати посилання на джерело. Посилання подають у квадратних дужках після викладених даних або виразу. У дужках зазначають номер джерела згідно зі списком використаної літератури, наприклад, [1, 4].

Бібліографічний опис використаної *літератури* виконують відповідно до чинного ДСТУ ГОСТ 7.1: 2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання (ГОСТ 7.1–2003, IDT)», який містить приклади бібліографічного опису різних видів документів і літературних джерел.

### **1.3 Захист курсової роботи**

Перед захистом курсової роботи студент повинен уважно ознайомитись із зауваженнями керівника та підготувати змістовні відповіді на них. Доповідь

студента при захисті курсової роботи, за основними його положеннями, повинна тривати не більше, ніж 10–15 хвилин. Студент у своїй доповіді повинен повідомити назву теми, перелік висвітлених у ній питань, подати основні результати розрахунків, проведених у роботі та загальні висновки. Оцінку, на яку заслуговує студент за виконану та викладену роботу, повідомляють одразу після захисту.

#### **1.4 Критерії оцінювання виконання курсової роботи**

Оцінювання виконання курсової роботи проводять за 100-бальною рейтинговою системою, яка доповнюється оцінками за національною системою і за європейською кредитно-трансферною системою – ECTS.

Критерії оцінювання знань з навчальної дисципліни, формою семестрового контролю якої є курсова робота (на виконання відводиться 36 годин, один кредит) із загального обсягу кредитів, запланованих на вивчення дисципліни в семестрі:

Вид контролю	Максимальний бал
Виконання курсового проекту (роботи), наповнюваність змісту, якість оформлення, своєчасність виконання, творчий підхід	60 (детальний розподіл балів здійснюється в робочій навчальній програмі)
Захист курсового проекту (роботи)	40
Усього	100

Незадовільно (1–59 балів/FX) оцінюється робота, у якій студент не виконав завдання стосовно дослідження курсової роботи, не зміг викласти основні теоретичні положення і не має навичок їх практичного застосування.

Оцінку задовільно (60–63 балів/E) одержує студент, який у трактуванні теоретичних положень припускається значних неточностей, а у викладенні аналітичної частини допускає значні помилки.

Оцінку задовільно (64–73 бали/D) одержує студент, який у трактуванні теоретичних положень припускається значних неточностей, а у викладенні аналітичної частини допускає незначні помилки, не вміє самостійно аналізувати, узагальнювати, робити висновки.

Оцінка добре (74–81 бал/C) виставляється студенту тоді, коли він може самостійно аналізувати, узагальнювати, робити висновки та пропозиції, але у роботі мають місце неточності.

Оцінка добре (82–89 балів/B) виставляється студенту тоді, коли він може самостійно аналізувати, узагальнювати, робити висновки та пропозиції, але у роботі відсутні елементи наукової новизни та оригінальності.

Оцінка відмінно (90–100 балів/A) виставляється студенту тоді, коли він може самостійно аналізувати, узагальнювати, робити висновки, займається науковою роботою у визначеному напрямі, бере участь у наукових конференціях, має наукові публікації у фахових журналах, а пропозиції дослідження містять елементи наукової новизни.

## **2 МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ КУРСОВИХ РОБІТ**

**Завдання І.** Розв’язання задач лінійного програмування у транспортній галузі графоаналітичним методом.

При двох змінних  $x_1$  і  $x_2$  прямі будемо в координатах  $x_1Ox_2$ .

1. Будемо прямі, рівняння яких виходять з нерівностей.

Для прямої загального положення  $Ax_1 + Bx_2 = C$  будемо її по двох точках її перетину з осями координат.

Прийmemo  $x_2 = 0$ , тоді  $x_1 = C/A$ , тобто  $(C/A; 0)$  – точка перетину прямої з віссю  $Ox_1$ .

Прийmemo  $x_1 = 0$ , тоді  $x_2 = C/B$ , тобто  $(0; C/B)$  – точка перетину прямої з віссю  $Ox_2$ .

2. Знаходимо напівплощини, що визначаються кожною з нерівностей. Для цього записати нерівність відносно змінної  $x_2$ . Якщо в нерівності стоїть знак " $\geq$ ", нерівність визначає верхню напівплощину від даної прямої, якщо знак " $\leq$ " – нижню напівплощину. Заштриховуємо напівплощини.

3. Знаходимо область допустимих рішень (ОДР). ОДР визначається як загальна частина всіх напівплощин, які відповідають усім даним нерівностям. Областю допустимих рішень на площині може бути або опуклий багатокутник, або опукла багатокутна необмежена область, або порожня область, або єдина точка.

4. Будуємо вектор  $\vec{C} = (c_1; c_2)$ , який указує напрямом зростання цільової функції. Протилежний вектор  $(-\vec{C})$  показує напрямом убуття цільової функції.

5. Проводимо через вершини багатокутника рішень прямі, перпендикулярні вектору  $\vec{C}$ . Знаходимо точки, у яких цільова функція набуває максимального (найбільш далека в напрямку зростання вектора  $\vec{C}$  вершина) і мінімального (найбільш далека в протилежному напрямку вершина) значення.

6. Визначаємо координати точки максимуму і точки мінімуму цільової функції і обчислюємо значення цільової функції в цих точках. Щоб знайти координати точки на перетині двох прямих, записуємо систему рівнянь з рівнянь двох цих прямих, і з неї знаходимо значення змінних.

**Приклад виконання завдання.** Розв'язати задачу лінійного програмування графоаналітичним методом (визначити, у яких точках цільова функція набуває екстремуму та відповідного значення цільової функції):

$L(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max (\min)$  – знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції при обмеженнях:

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12,$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

### Розв'язок.

1. Запишемо нерівності у вигляді рівнянь і знайдемо точки перетину прямих загального положення з осями координат:

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \text{ (пряма 1),} \quad \text{якщо } x_1 = 0, \text{ то } x_2 = 4;$$

$$\text{якщо } x_2 = 0, \text{ то } x_1 = 3;$$

точки прямої 1: (0; 4) і (3; 0);

$$3x_1 + 4x_2 = 24 \text{ (пряма 2),} \quad \text{якщо } x_1 = 0, \text{ то } x_2 = 6;$$

$$\text{якщо } x_2 = 0, \text{ то } x_1 = 8;$$

точки прямої 2: (0; 6) і (8; 0).

Будуємо систему координат  $x_1Ox_2$ . Прямі  $x_1 = 0$  і  $x_2 = 0$  збігаються з осями координат. За координатами двох точок будуємо прямі 1 і 2 (рис. 1.1).

2. Заштриховуємо напівплощини, що відповідають нерівностям, включаючи  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ .

3. Знаходимо ОДР – це опуклий багатокутник ABCD.

4. Будуємо вектор  $\vec{C} = (2; -5)$ , що виходить з початку координат у точку (2; -5).

5. Проводимо через вершини багатокутника рішень ABCD прямі, перпендикулярні вектору  $\vec{C}$ . Знаходимо точку, у яких цільова функція набуває максимального значення – це найбільш далека в напрямку зростання вектора  $\vec{C}$  вершина A (8; 0), і мінімального значення – найбільш далека в протилежному напрямку вершина D (0; 6).

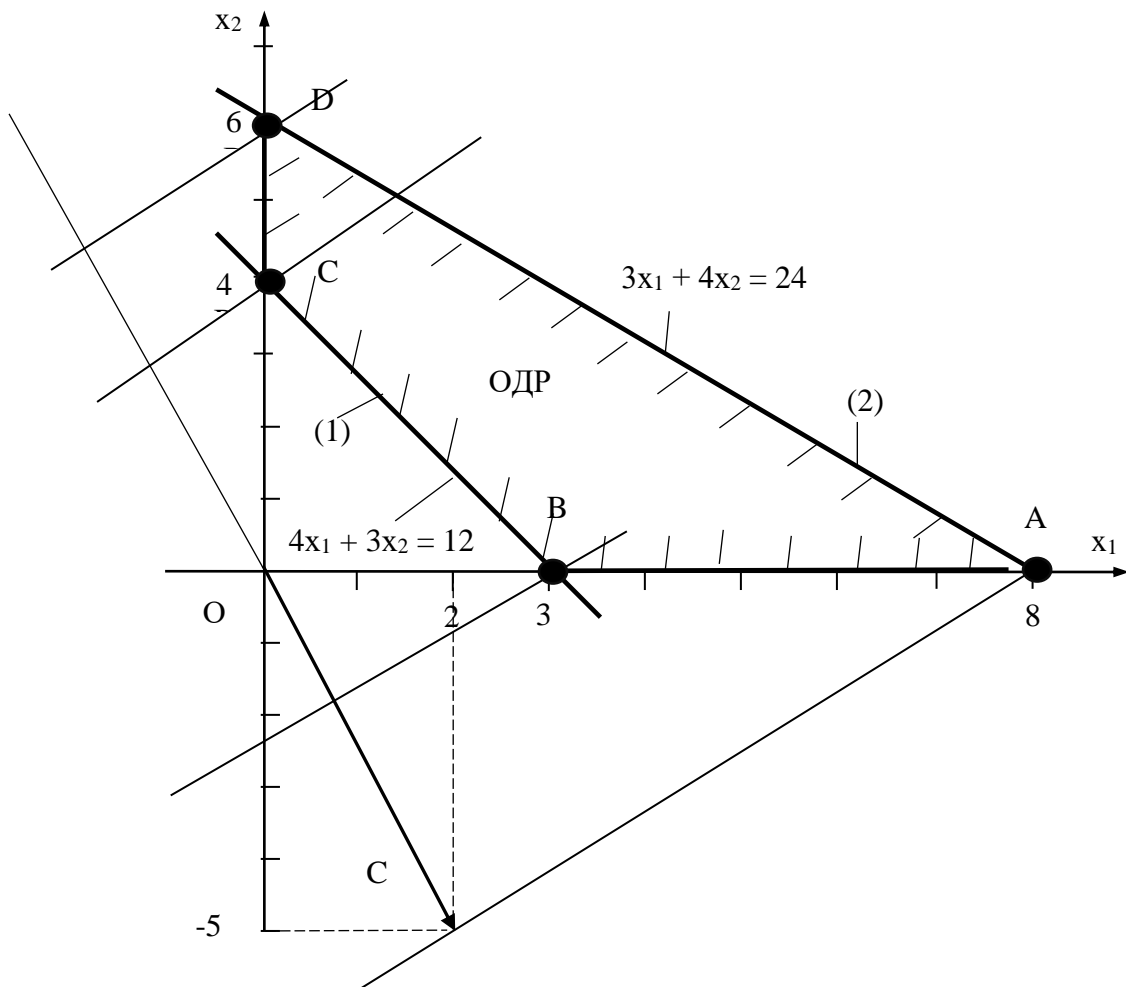


Рис. 1.1 – Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

6. Координати точки максимуму  $A - (8; 0)$ , точки мінімуму  $D - (0; 6)$ .

Обчислимо значення цільової функції в цих точках:

$$A: 2 \cdot 8 - 5 \cdot 0 = 16;$$

$$D: 2 \cdot 0 - 5 \cdot 6 = -30.$$

Функція набуває максимального значення (16) у точці  $A (8; 0)$ ; функція набуває мінімального значення (-30) у точці  $D (0; 6)$ .

**Завдання II.** Розв'язання задач лінійного програмування у транспортній галузі симплекс-методом.

Щоб позбутися нерівностей в обмеженнях, у кожне обмеження вводиться невід'ємна балансова змінна  $s_i$  (за кількістю обмежень  $i$ ).

У системі обмежень далі потрібно знайти *базисні змінні*. *Базисні змінні* – це змінні, які входять тільки в одне рівняння системи обмежень і притому з одиничним коефіцієнтом.

Тепер можна сформулювати *початкову симплекс-таблицю*. *Симплекс-таблиця* являє собою розширену матрицю системи обмежень з деякими додатковими стовпцями і рядками.

У верхньому рядку записують означення стовпців. Імена базисних змінних записують у стовпець "БазЗмін". Стовпці  $x_1 \dots s_i$  містять коефіцієнти при відповідних змінних у рівняннях системи обмежень (кожному рівнянню відповідає окремий рядок).

У стовпець «Рішення» спочатку записують вільні члени відповідних рівнянь. Вони ж показують значення базисних змінних для поточного рішення, яке відображається симплекс-таблицею, на певному етапі (*ітерації*) рішення задачі. Коефіцієнти цільової функції відображаються в симплекс-таблиці в рядку «L».

**Приклад виконання завдання.** Для розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом скласти початкову симплекс-таблицю і виконати першу ітерацію:

Знайти значення змінних  $x_1 \dots x_4$ , за яких функція:

$$L(x) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4$$

набуває **максимального** значення, за умови таких обмежень:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 280;$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 80;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 250;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

**Розв'язок.**

1. До кожної нерівності додаємо *балансову* змінну, перетворюючи її в рівність:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 280;$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + s_2 = 80;$$



$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 250;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

2. Записуємо *початкову симплекс-таблицю* з коефіцієнтів при змінних. У стовпець «Рішення» записуємо вільні члени рівностей.

БазЗмін	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	Рішення	Відношення
s <sub>1</sub>	2	1	1	1	1	0	0	280	
s <sub>2</sub>	2	4	2	2	0	1	0	80	
s <sub>3</sub>	1	2	1	2	0	0	1	250	
L	4	3	6	7	0	0	0		

3. За максимальним коефіцієнтом (задача на максимум) або мінімальним (задача на мінімум) у рядку «L» знаходимо *стовпець, що дозволяє*. У нашому прикладі задача на максимум, максимальний коефіцієнт в рядку "L" – 7, тому стовпець, що дозволяє, – x<sub>4</sub>.

Ділимо елементи стовпця «Рішення» на елементи стовпця, що дозволяє (окрім рядка "L") і записуємо у стовпець «Відношення». За мінімальним елементом у стовпці «Відношення» визначаємо *рядок, що дозволяє*, – s<sub>2</sub>.

На перетині стовпця, що дозволяє і рядка, що дозволяє, знаходиться *елемент, що дозволяє*, – у даному випадку 2.

БазЗмін	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	Рішення	Відношення
s <sub>1</sub>	2	1	1	1	1	0	0	280	280/1=280
s <sub>2</sub>	2	4	2	2	0	1	0	80	80/2=40
s <sub>3</sub>	1	2	1	2	0	0	1	250	250/2=125
L	4	3	6	7	0	0	0		

### Ітерація 1.

Замінюємо базисну змінну у стовпці **БазЗмін** – переносимо її із стовпця, що дозволяє (x<sub>4</sub>), у рядок, що дозволяє (на місце s<sub>2</sub>).

Елементи стовпця, що дозволяє, і рядка, що дозволяє, поки не заповнюємо.

Інші елементи таблиці (окрім стовпця «Відношення») визначають за *правилом прямокутника* – від даного елемента ведемо вертикальну та горизонтальну лінії до перетину з рядком, що дозволяє, і стовпцем, що дозволяє.

Нове значення елемента дорівнює поточному значенню елемента мінус добуток елементів у стовпці, що дозволяє, і в рядку, що дозволяє, поділене на елемент, що дозволяє.

Записуємо нове значення кожного елемента.

БазЗмін	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	Рішення	Від-ння
s <sub>1</sub>	$2-(1 \times 2)/2$	$1-(1 \times 4)/2$	$1-(1 \times 2)/2$		$1-(1 \times 0)/2$	$0-(1 \times 1)/2$	$0-(1 \times 0)/2$	$280-(1 \times 80)/2$	
x <sub>4</sub>									
s <sub>3</sub>	$1-(2 \times 2)/2$	$2-(4 \times 2)/2$	$1-(2 \times 2)/2$		$0-(2 \times 0)/2$	$0-(2 \times 1)/2$	$1-(0 \times 2)/2$	$250-(80 \times 2)/2$	
<b>L</b>	$4-(2 \times 7)/2$	$3-(4 \times 7)/2$	$6-(2 \times 7)/2$		$0-(0 \times 7)/2$	$0-(1 \times 7)/2$	$0-(0 \times 7)/2$	$0-(7 \times 80)/2$	--

Обнуляємо елементи стовпця, що дозволяє, крім елемента, що дозволяє.

Елементи в рядку, що дозволяє, ділимо на елемент, що дозволяє (на 2).

Отримаємо значення:

БазЗмін	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	Рішення	Від-ння
s <sub>1</sub>	1	-1	0	0	1	-1/2	0	240	
x <sub>4</sub>	1	1	1	1	0	1/2	0	40	
s <sub>3</sub>	-1	-2	-1	0	0	-1	1	170	
<b>L</b>	<b>-3</b>	<b>-11</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-7/2</b>	<b>0</b>	<b>-280</b>	

Якщо після чергової ітерації в рядку "L" немає додатних (задача на максимум), або від'ємних (задача на мінімум) коефіцієнтів, то знайдено оптимальне рішення.

Так як в рядку цільової функції немає додатних коефіцієнтів, то досягнуто оптимальне рішення.

Оптимальне значення функції  $L(x) = 280$  досягається при значеннях змінних (знаходимо зі стовпця «Рішення»):  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = 40$ ;  $s_1 = 240$ ;  $s_2 = 0$ ;  $s_3 = 170$ .

**Завдання III.** Знаходження опорних планів транспортної задачі. Знаходження оптимального плану транспортної задачі.

Класична транспортна задача є задачею про знаходження оптимального плану перевезення вантажів від постачальників (виробників) до споживачів. Перевезення вантажів вимагає великих витрат, особливо зараз, тому раціональна організація перевезень дає можливість заощадити значні кошти.

Нехай маємо  $m$  пунктів відправлення (*постачальники*) –  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , у яких перебуває однорідний вантаж. Кількість вантажу позначимо відповідно  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

Цей вантаж треба перевезти в  $n$  пунктів призначення (*споживачі*)  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , потреба яких у такому вантажу становить відповідно  $b_1, b_2, \dots, b_n$  одиниць.

Відомі також  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) – вартість перевезення однієї одиниці вантажу з  $i$ -го пункту відправлення до  $j$ -го пункту призначення.

Потрібно знайти змінні задачі  $x_{ij}$  – кількість вантажу, який потрібно перевезти з пункту відправлення  $i$  в пункт призначення  $j$ .

У загальному вигляді вихідні дані задачі можна подати у вигляді таблиці:

Постачальники \ Споживачі	Споживачі				Запаси
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$	$a_m$
Потреби	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

Нехай загальний обсяг вантажу, що поставляється, дорівнює загальному обсягу вантажу, що споживається, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.1)$$

У такій постановці задача називається *закритою* і в цьому випадку її можна розв'язати за *методом потенціалів*.

Матриця  $(c_{ij})_{m \times n}$  має назву *матриці тарифів* (витрат), а числа  $c_{ij}$  – тарифами.

*План транспортної задачі* – матриця  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ , де кожне число  $x_{ij}$  – кількість вантажу, який потрібно перевезти з пункту відправлення  $i$  до пункту призначення  $j$ . Матрицю  $X$  називають ще *матрицею перевезень*.

Сумарні транспортні витрати, пов'язані з реалізацією плану перевезень, повинні бути мінімальними. Їх можна представити цільовою функцією:

$$L(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.2)$$

де  $x_{ij}$  – кількість вантажу, який перевозиться з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення.

Змінні повинні задовольняти обмеженням за запасами, за потребами і за умовами невід'ємності. У математичній формі ці обмеження можна представити так:

1. Вантажі з усіх пунктів відправлення мають бути вивезені:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

2. Потреби всіх пунктів призначення повинні бути задоволені:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

3. Кількість вантажу має бути невід'ємною:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m. \quad (3.5)$$

Вихідний опорний план транспортної задачі визначається за методом «північно-західного кута» або за методом «мінімального елемента».

За правилом «північно-західного кута» для складання вихідного плану перевезень таблиця заповнюється, починаючи з верхнього лівого («північно-західного кута»). У клітину рядка 1, стовпця 1 – клітину (1, 1) заносимо менше з чисел  $a_1$  і  $b_1$ , тобто:

$$x_{11} = \min(a_1; b_1).$$

Якщо  $a_1 > b_1$ , то  $x_{11} = b_1$  і потреби першого споживача задоволені повністю (перший стовпець закритий для заповнення інших його клітин). Рухаючись далі по першому рядку, записуємо в клітину (1, 2) менше з чисел  $a_1 - b_1$  і  $b_2$ , тобто

$$x_{12} = \min(a_1 - b_1; b_2).$$

Якщо  $b_1 > a_1$ , то  $x_{11} = a_1$  і запаси першого постачальника витрачені повністю (перший рядок закритий для заповнення інших його клітин).

Переходимо до заповнення сусідньої клітини (2, 1), куди заносимо  $x_{21} = \min(a_2; b_1 - a_1)$ .

Заповнивши другу клітину (1, 2) або (2, 1), переходимо до заповнення наступної, третьої клітини або у другому рядку, або у другому стовпці. Будемо продовжувати цей процес до повного вичерпання вантажу у постачальників і повного задоволення споживачів.

План, отриманий за правилом «північно-західного кута», буде *опорним планом* задачі.

За методом «мінімального елемента» заповнення починається з клітини, якій відповідає найменший тариф з усієї матриці тарифів. Потім залишок у стовпці або рядку поміщаємо в клітину того ж стовпця або рядка, який відповідає наступному за величиною значенню тарифу.

Знаходження оптимального плану транспортної задачі за *методом потенціалів*.

Після того, як знайдений вихідний опорний план перевезень, кожному постачальнику (кожному рядку) ставиться у відповідність деяке число  $u_i$ , а кожному споживачу – деяке число  $v_j$ . Числа  $u_i$  і  $v_j$  називають *потенціалами*, відповідно постачальника і споживача. Потенціали вибираються так, щоб у будь-якій завантаженій клітині їх сума дорівнювала тарифу цієї клітини, тобто  $u_i + v_j = c_{ij}$ .

Алгоритм розв'язання транспортної задачі за методом потенціалів:

1) побудувати опорний план перевезень за одним із наведених вище методів;

2) обчислити потенціали  $u_i$  і  $v_j$ , відповідно постачальників і споживачів;

3) обчислити суми потенціалів (*непрямі тарифи*) для вільних клітин  $u_i + v_j = c'_{ij}$ ;

4) перевірити різниці (*оцінки*)  $s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$ ; якщо для вільних клітин усі  $s_{ij} \geq 0$ , то отриманий план оптимальний. Якщо хоч одна оцінка  $s_{ij} < 0$ , до зайнятих додають клітину, для якої оцінка мінімальна, і отримують новий план перевезень. Процес продовжують до тих пір, поки не буде отримано план, для якого всі оцінки  $s_{ij} \geq 0$ .

**Приклад виконання завдання.** Завод має три цехи А, Б, В і чотири склади № 1, № 2, № 3, № 4.

Цех А виробляє за добу 300 шт. виробів, цех Б – 400 шт., цех В – 200 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується такими показниками: склад № 1 – 200 шт., № 2 – 300 шт., склад № 3 – 300 шт., склад № 4 – 100 шт.

Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно дорівнює 2, 4, 3, 6 грн, із цеха Б – 3, 6, 8, 7 грн, із цеха В – 5, 10, 9, 5 грн.

Для транспортної задачі записати її математичну модель (вираз для цільової функції та систему обмежень) – у символічному вигляді та з урахуванням значень задачі.

Для цієї транспортної задачі визначити за методом «північно-західного кута» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції.

Для цієї транспортної задачі визначити за методом «мінімального елемента» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції.

Визначити за методом потенціалів оптимальний план цієї транспортної задачі та відповідне йому значення цільової функції.

**Розв'язок.**

Задача буде мати вигляд:

Цех \ Склад	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Запаси
А	2	4	3	6	300
Б	3	6	8	7	400
В	5	10	9	5	200
Потреби	200	300	300	100	

Цільова функція у загальному вигляді:

$$L(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34} \rightarrow \min$$

Цільова функція згідно зі значеннями задачі:

$$L(X) = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23} + 7x_{24} + 5x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 5x_{34} \rightarrow \min .$$

Система обмежень у загальному вигляді:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m.$$

Система обмежень згідно зі значеннями задачі:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100 \end{cases}$$

$$x_{11} - x_{34} \geq 0,$$

$$x_{11} - x_{34} - \text{цілі.}$$

Для знаходження опорних планів транспортної задачі наведемо задачу у більш зручному вигляді.

Опорний план транспортної задачі за методом «північно-західного кута» виглядатиме так (у дужках наведена послідовність заповнення).

Запаси \ Потреби	Потреби			
	200	300	300	100
300	200(1) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	100(2) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>
400	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	200(3) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	200(4) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>
200	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	100(5) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>	100(6) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>

Усі запаси вивезені, потреби задоволені.

Значення цільової функції:  $L(X) = 2 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 200 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 5000$  грн.

Опорний план транспортної задачі за методом «мінімального елемента» виглядатиме так (у дужках наведена послідовність заповнення):



Запаси \ Потребы	200		300		300		100	
	300	200(1)	2		4	100(2)	3	
400		3	300(4)	6	100(5)	8		7
200		5		10	100(6)	9	100(3)	5

Усі запаси вивезені, потреби задоволені.

Значення цільової функції:  $L(X) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 100 = 4700$  грн.

Для розв'язку транспортної задачі *методом потенціалів* опорний план беремо за правилом «мінімального елемента».

Визначаємо потенціали зайнятих клітин:

$$(1; 1) \quad u_1 + v_1 = 2;$$

$$(1; 3) \quad u_1 + v_3 = 3;$$

$$(2; 2) \quad u_2 + v_2 = 6;$$

$$(2; 3) \quad u_2 + v_3 = 8;$$

$$(3; 3) \quad u_3 + v_3 = 9;$$

$$(3; 4) \quad u_3 + v_4 = 5.$$

Усіх потенціалів ( $m$  рядків +  $n$  стовпців) =  $3 + 4 = 7$ , а зайнятих клітин (рівнянь  $u_i + v_j = c_{ij}$ ) – 6. Для визначення  $u_i$  и  $v_j$  потрібно розв'язати систему з 6 рівнянь з 7 невідомими. Для цього присвоюємо одній із змінних ( $u_1$ ) нульове значення. Тоді  $v_1 = 2$ ;  $v_3 = 3$ ;  $u_2 = 5$ ;  $v_2 = 1$ ;  $u_3 = 6$ ;  $v_4 = -1$ .

Визначаємо непрямі тарифи для вільних клітин:

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1;$$

$$c'_{14} = u_1 + v_4 = 0 + (-1) = -1;$$

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 5 + 1 = 6;$$

$$c'_{24} = u_2 + v_4 = 5 + (-1) = 4;$$

$$c'_{31} = u_3 + v_1 = 6 + 2 = 8;$$

$$c'_{32} = u_3 + v_2 = 6 + 1 = 7.$$

Визначаємо різниці для вільних клітин:

$$s_{12} = c_{12} - c'_{12} = 4 - 1 = 3;$$

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 6 - (-1) = 7;$$

$$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = 3 - 6 = -3;$$

$$s_{24} = c_{24} - c'_{24} = 7 - 4 = 3;$$

$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = 5 - 8 = -3;$$

$$s_{32} = c_{32} - c'_{32} = 10 - 7 = 3.$$

Серед різниць є дві негативні, план неоптимальний. Різниці (оцінки) мінімальні для клітин (2; 1) і (3; 1).

Переводимо в число зайнятих спочатку клітину (2; 1). Будуємо для неї замкнутий прямокутний *контур*, вершинами якого є завантажені клітини. Вихідній клітині задається знак "+", далі знаки чергуються.

Потреби \ Запаси	200	300	300	100
300	200   2	4	100   3	6
400	3   3	300   6	100   8	7
200	5	10	100   9	100   5

Diagram description: A closed rectangular contour is drawn around the cells (2,1), (1,1), (1,3), and (2,3). The cell (2,1) contains a circled '+' sign. The cell (1,1) contains a circled '-' sign. The cell (1,3) contains a circled '+' sign. The cell (2,3) contains a circled '-' sign. Dashed arrows indicate the path: (2,1) to (1,1), (1,1) to (1,3), (1,3) to (2,3), and (2,3) to (2,1).

Завантажуємо позитивні клітини (2; 1) і (1; 3) найменшою кількістю вантажу, узятим з негативних клітин (1; 1) и (2; 3) –  $\min \{200; 100\} = 100$  одиниць.

Отримуємо новий план:

	Потреби	200	300	300	100
Запаси					
300		100		200	
400		100	300		
200				100	100
		2	4	3	6
		3	6	8	7
		5	10	9	5

Те ж робимо і для клітини (3, 1).

	Потреби	200	300	300	100
Запаси					
300		100		200	
400		100	300		
200				100	100
		2	4	3	6
		3	6	8	7
		5	10	9	5

Diagram illustrating the adjustment of cell (3,1) with dashed arrows and circled signs (+/-) indicating the flow of units.

Завантажуємо позитивні клітини (3; 1) і (1; 3) найменшою кількістю вантажу, узятим з негативних клітин (1; 1) і (3; 3) –  $\min \{100; 100\} = 100$  одиниць.

Отримаємо новий план:

	Потреби	200	300	300	100
Запаси					
300				300	
400		100	300		
200		100			100
		2	4	3	6
		3	6	8	7
		5	10	9	5

Знову визначаємо потенціали рядків і стовпців і оцінки для всіх вільних клітин.

Визначаємо потенціали зайнятих клітин:

$$(1; 3) \quad u_1 + v_3 = 3; \quad u_1 = 0, \text{ тоді } v_3 = 3$$

$$(2; 1) \quad u_2 + v_1 = 3;$$

$$(2; 2) \quad u_2 + v_2 = 6;$$

$$(3; 1) \quad u_3 + v_1 = 5;$$

$$(3; 4) \quad u_3 + v_4 = 5.$$

Потенціалів 7, а зайнятих кліток 5.

Навіть після присвоєння змінної  $u_1$  нульового значення система все одно не розв'язується. Тоді у вільній клітині вводимо *нульове перевезення*. У нашому випадку в клітку (1, 2) вводимо 0 одиниць вантажу і розраховуємо для неї потенціали:

$$u_1 + v_2 = 4, \text{ тоді } v_2 = 4; \quad u_2 = 2; \quad v_1 = 1; \quad u_3 = 4; \quad v_4 = 1.$$

Визначаємо непрямі тарифи вільних клітин:

$$c'_{11} = u_1 + v_1 = 0 + 1 = 1;$$

$$c'_{14} = u_1 + v_4 = 0 + 1 = 1;$$

$$c'_{23} = u_2 + v_3 = 2 + 3 = 5;$$

$$c'_{24} = u_2 + v_4 = 2 + 1 = 3;$$

$$c'_{32} = u_3 + v_2 = 4 + 4 = 8;$$

$$c'_{33} = u_3 + v_3 = 4 + 3 = 7.$$

Визначаємо різниці для вільних клітин:

$$s_{11} = c_{12} - c'_{12} = 2 - 1 = 1;$$

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 6 - 1 = 5;$$

$$s_{23} = c_{21} - c'_{21} = 8 - 5 = 3;$$

$$s_{24} = c_{24} - c'_{24} = 7 - 4 = 3;$$

$$s_{32} = c_{31} - c'_{31} = 10 - 8 = 2;$$

$$s_{33} = c_{32} - c'_{32} = 9 - 7 = 2.$$

Серед різниць немає негативних, план оптимальний.

Значення цільової функції:  $L(X) = 3 \cdot 300 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 4000$  грн.

**Завдання IV.** Розрахунок часових параметрів сітьової моделі транспортного процесу аналітичним способом.

*Сіткове планування* дозволяє графічно відобразити і пов'язати між собою усі події, що забезпечують оптимальне досягнення поставленої мети. Основою сіткового планування є *сітковий графік*.

*Сітковий графік* є графічною моделлю комплексу робіт або виробничого процесу.

*Сітковий графік* будується за допомогою двох елементів: кола, що позначає *подію*, і стрілки, що поєднує дві події і позначає *роботу*.

*Подія* – результат виконання однієї або декількох робіт.

*Робота* – будь-який процес, дія, за допомогою якого досягають визначених результатів.

У сіткових графіках напрямок стрілок відображає хід часу. Довжина стрілок не пов'язана з тривалістю робіт. Традиційно послідовність стрілок орієнтується зліва направо.

Подія не має тривалості у часі. Подія зображується на сітковому графіку за допомогою кола, у якому записують номер події.

У сітковому графіку особливими подіями є *вихідна*, у яку не входить жодна робота, і *завершальна*, з якої не виходить жодна робота.

Важливим елементом сіткового графіка є *шлях* – безперервна послідовність робіт. *Довжина шляху* визначається як сума тривалостей робіт, що його складають.

*Повний шлях* – шлях від вихідної події до завершальної.

Повний шлях, що має найбільшу тривалість, називають *критичним шляхом*, а його тривалість  $t_{кр}$  – *критичним строком*. *Критичними* називають також події та роботи, що лежать на критичному шляху.

До основних часових параметрів сіткового графіка відносять тривалість критичного шляху, ранні й пізні терміни звершення подій, резерви часу події, ранні й пізні терміни початку і закінчення робіт, повні й вільні резерви часу робіт.

Уведемо наступні позначення:  $t(i-j)$  – тривалість роботи при переході від події  $i$  до події  $j$ ;  $t(i)$ ,  $t(j)$  – терміни звершення попередньої події з номером  $i$  та наступної події з номером  $j$ .

*Ранній термін звершення події*  $t_p(i)$  – сумарна тривалість робіт найбільшого за тривалістю шляху, що веде з початкової події графіка в цю подію  $i$ . Ранній термін звершення вихідної події дорівнює нулю.

*Пізній термін звершення події*  $t_n(i)$  – різниця між тривалістю критичного шляху і сумарною тривалістю робіт, які лежать на максимальному зі шляхів, що ведуть від цієї події і до завершальної події графіка. Пізній термін звершення завершальної події дорівнює тривалості критичного шляху.

Усі роботи, що не лежать на критичному шляху, мають *резерви часу*, іншими словами, допустимі терміни затримки виконання робіт, не змінюючи терміну настання завершальної події сітки.

*Резерв часу*  $R(i)$  події  $i$  дорівнює різниці між пізнім і раннім терміном звершення події:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \quad (4.1)$$

Також визначаються:

– ранній термін початку роботи:

$$t_{p.n.}(i-j) = t_p(i); \quad (4.2)$$

– ранній термін закінчення роботи (i-j):

$$t_{p.o.}(i-j) = t_p(i) + t(i-j); \quad (4.3)$$

– пізній термін початку роботи (i-j):

$$t_{n.n.}(i-j) = t_n(j) - t(i-j); \quad (4.4)$$

– пізній термін закінчення роботи (i-j):

$$t_{n.o.}(i-j) = t_n(j); \quad (4.5)$$

– повний резерв часу  $R_n(i-j)$  роботи  $(i-j)$ :

$$R_n(i-j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i-j) = t_n(j) - t_{p.o}(i-j); \quad (4.6)$$

– вільний резерв часу  $R_c(i-j)$  роботи  $(i-j)$ :

$$R_c(i-j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i-j) = t_p(j) - t_{p.o}(i-j) \quad (4.7)$$

**Приклад розв’язання завдання.** За вихідними даними побудувати сітковий графік і визначити його параметри (критичний шлях і його тривалість, ранні та пізні терміни звершення подій, резерви часу подій, ранні та пізні терміни початку та закінчення робіт, повні та вільні резерви часу робіт):

$t(1-2) = 3$ дні	$t(2-3) = 17$ днів	$t(3-6) = 12$ днів	$t(6-9) = 14$ днів
$t(1-3) = 12$ днів	$t(2-4) = 8$ днів	$t(4-7) = 6$ днів	$t(7-9) = 3$ дні
$t(1-5) = 4$ дні	$t(2-5) = 18$ днів	$t(5-8) = 7$ днів	$t(8-9) = 9$ днів

**Розв’язок:**

1. Кожну подію на графіку зображуватимемо колом, у якому запишемо його номер (рис. 4.1). Вихідну подію прийнято зображувати крайньою зліва. Праворуч від вихідної події зображуємо події, які пов’язані з вихідною подією роботами. Події, відповідно до початкових даних, з’єднуються стрілками, над якими вказується тривалість роботи. Завершальну подію прийнято зображувати крайньою справа. Кожен зі шляхів на графіку повинен йти зліва направо в порядку зростання номерів подій.

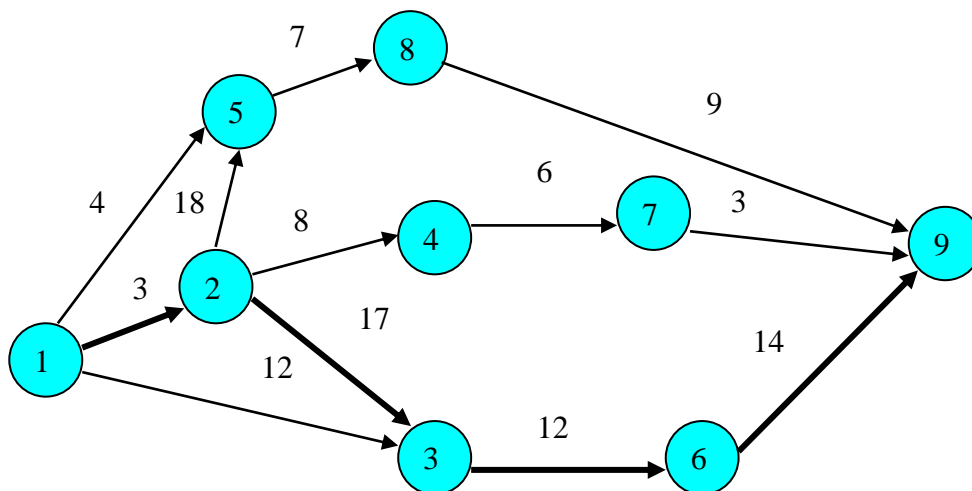


Рис. 4.1 – Сітковий графік

2. За отриманим сітковим графіком визначаються повні шляхи і розраховується їх тривалість.

Повні шляхи:

$$1-2-3-6-9: t(1-2) + t(2-3) + t(3-6) + t(6-9) = 3+17+12+14 = 46 \text{ днів};$$

$$1-2-4-7-9: t(1-2) + t(2-4) + t(4-7) + t(7-9) = 3+8+6+3 = 20 \text{ днів};$$

$$1-2-5-8-9: t(1-2) + t(2-5) + t(5-8) + t(8-9) = 3+18+7+9 = 37 \text{ днів};$$

$$1-3-6-9: t(1-3) + t(3-6) + t(6-9) = 3+12+14 = 29 \text{ днів};$$

$$1-5-8-9: t(1-5) + t(5-8) + t(8-9) = 4+7+9 = 20 \text{ днів}.$$

3. Визначається критичний шлях як повний шлях з максимальною тривалістю. Виділяємо критичний шлях на сітковому графіку. Тривалість критичного шляху:  $t_{кр} = t(1-2) + t(2-3) + t(3-6) + t(6-9) = 3+17+12+14 = 46$  днів.

4. Визначаються ранні терміни звершення подій.

Ранній термін звершення вихідної події дорівнює нулю. Ранній термін звершення події 2 дорівнює 3 дням, оскільки до нього веде тільки один шлях (1-2) з тривалістю 3 дні. До події 3 ведуть два шляхи – 1-3 (тривалістю 12 днів) і 1-2-3 (тривалістю 3+17 = 20 днів). Отже, ранній термін звершення події 3 дорівнює 20 дням. До події 5 також ведуть два шляхи – 1-5 (тривалістю 4 дні) і 1-2-5 (тривалістю 3+18 = 21 день). Отже, ранній термін звершення події 3 дорівнює 21 дню. Аналогічно обчислюються ранні терміни звершення інших подій. Дані заносимо в таблицю 1 (див. нижче).

5. Визначаються пізні терміни звершення подій.

Пізній термін звершення завершальної події дорівнює тривалості критичного шляху, тобто пізній термін звершення події 9 дорівнює 46 дням. Пізній термін звершення події 8 дорівнює різниці тривалості критичного шляху і шляху 8-9. Пізній термін звершення події 5 дорівнює різниці тривалості критичного шляху і шляху 5 – 8 – 9 = 30 днів. Від події 2 до завершальної події йде декілька шляхів: 2 – 3 – 6 – 9 (43 дні), 2 – 4 – 7 – 9 (17 днів), 2 – 5 – 8 – 9 (34 дні). Пізнім терміном звершення події 2 буде різниця між тривалістю критичного шляху і максимальною тривалістю цих шляхів (46 – 43 = 3 дні). Дані заносимо до таблиці 4.1 (див. нижче).



6. Визначається резерв часу  $R(i)$  події  $i$ .

Результати розрахунків заносимо до таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків часових параметрів подій

Номер події	Ранній термін звершення події, днів	Пізній термін звершення події, днів	Резерв часу події, днів
<b>1</b>	0	0	0
<b>2</b>	3	3	0
<b>3</b>	20	20	0
<b>4</b>	11	37	26
<b>5</b>	21	30	9
<b>6</b>	32	32	0
<b>7</b>	17	43	26
<b>8</b>	28	37	9
<b>9</b>	46	46	0

7. Визначаються ранні та пізні терміни початку і закінчення робіт, повні й вільні резерви часу робіт.

Результати розрахунку цих параметрів заносимо до таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Результати розрахунків часових параметрів робіт

Робота	$t(i-j)$ , днів	$t_{р.н.}$ , днів	$t_{р.о.}$ , днів	$t_{п.н.}$ , днів	$t_{п.о.}$ , днів	$R_{п.}$ , днів	$R_{с.}$ , днів
<b>1–2</b>	3	0	3	0	3	0	0
<b>1–3</b>	12	0	12	8	20	8	8
<b>1–5</b>	4	0	4	26	30	26	17
<b>2–3</b>	17	3	20	3	20	0	0
<b>2–4</b>	8	3	11	29	37	26	0
<b>2–5</b>	18	3	21	12	30	9	0
<b>3–6</b>	12	20	32	20	32	0	0
<b>4–7</b>	6	11	17	37	43	26	0
<b>5–8</b>	7	21	28	30	37	9	0
<b>6–9</b>	14	32	46	32	46	0	0
<b>7–9</b>	3	17	20	43	46	26	26
<b>8–9</b>	9	28	37	37	46	9	9

Критичні роботи (роботи, що лежать на критичному шляху), так само, як і критичні події, резервів часу не мають.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Системологія на транспорті : Кн. 3: Дослідження операцій у транспортних системах : підручник : у 5 кн. / Е. В. Гаврилов, М. Ф. Дмитриченко, В. К. Доля [та ін.]. – К. : Знання України, 2009. – 375 с.
2. Четверухін Б. М. Дослідження операцій в транспортних системах : навчальний посібник. Ч. 1, 2 / Б. М. Четверухін. – К. : НТУ, 2001. – 141 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.
4. Зайченко О. Ю. Дослідження операцій : збірник задач / О. Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – К. : Видавничий дім «Слово», 2007. – 472 с.
5. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
6. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
7. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник / А. В. Катренко. – Львів : Магнолія Плюс, 2004. – 549 с.
8. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.
9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986. – 319 с.
10. Кузнецов А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Мн. : Вышэйш. школа, 1978. – 256 с.
11. Кожин А. П. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками : учеб. для вузов / А. П. Кожин, В. Н. Мезенцев. – М. : Транспорт, 1994. – 304 с.
12. Жлуктенко В. І. Дослідження операцій : навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, Л. Г. Тарасова, С.С. Савіна. — К.: КНЕУ, 2009. – 479 с.

## Приклади вихідних даних до курсової роботи

**Завдання І.** Розв'язати задачу лінійного програмування графоаналітичним методом (визначити, у якій точці цільова функція набуває екстремуму та відповідне значення цільової функції).

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3	Варіант № 4	Варіант № 5
$x_1 - x_2 \leq 4;$ $x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 - 2x_2 \geq -4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+5x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - x_2 \leq 6;$ $x_1 + x_2 \leq 8;$ $x_1 + x_2 \geq 3;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+5x_2 \rightarrow \min$	$x_1 - x_2 \leq 2;$ $x_1 + x_2 \leq 6;$ $2x_1 - x_2 \geq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+2x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 2x_2 \leq -8;$ $2x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 + x_2 \geq 2;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 2x_2 \leq -8;$ $x_1 + 2x_2 \leq 10;$ $x_1 + x_2 \geq 2;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+3x_2 \rightarrow \max$
Варіант № 6	Варіант № 7	Варіант № 8	Варіант № 9	Варіант № 10
$2x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 + x_2 \geq 2;$ $-x_1 + x_2 \leq -5;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+3x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + x_2 \geq 4;$ $2x_1 + x_2 \geq 4;$ $-x_1 + x_2 \leq -5;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+3x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + x_2 \geq 1;$ $x_1 + 2x_2 \geq 6;$ $x_1 - x_2 \leq -6;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+4x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + 2x_2 \geq 2;$ $2x_1 + 2x_2 \geq 6;$ $x_1 - x_2 \leq -8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+3x_2 \rightarrow \min$	$2x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 - x_2 \leq -5;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+5x_2 \rightarrow \min$
Варіант № 11	Варіант № 12	Варіант № 13	Варіант № 14	Варіант № 15
$2x_1 - x_2 \leq 4;$ $x_1 + 2x_2 \leq 4;$ $x_1 - 2x_2 \geq -6;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1-x_2 \rightarrow \min$	$x_1 - 2x_2 \leq 8;$ $x_1 + 2x_2 \leq 6;$ $x_1 + 2x_2 \geq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+2x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + 2x_2 \leq 2;$ $x_1 + 3x_2 \leq 6;$ $x_1 - 2x_2 \geq -4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-x_2 \rightarrow \min$	$x_1 - x_2 \leq 2;$ $x_1 + x_2 \leq 6;$ $x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 3x_2 \leq -6;$ $x_1 + 2x_2 \leq 8;$ $x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+2x_2 \rightarrow \max$

Варіант № 16	Варіант № 17	Варіант № 18	Варіант № 19	Варіант № 20
$2x_1 - x_2 \geq 0;$ $3x_1 - 5x_2 \geq -5;$ $x_1 + x_2 \leq 3;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-5x_2 \rightarrow \min$	$2x_1 - 2x_2 \geq 0;$ $x_1 - 4x_2 \geq -8;$ $x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-2x_2 \rightarrow \min$	$2x_1 - x_2 \geq 2;$ $x_1 - 4x_2 \geq -4;$ $x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 - x_2 \geq 2;$ $-x_1 - 4x_2 \geq -4;$ $x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+3x_2 \rightarrow \min$	$3x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $-2x_1 - 4x_2 \geq -4;$ $2x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+2x_2 \rightarrow \min$
Варіант № 21	Варіант № 22	Варіант № 23	Варіант № 24	Варіант № 25
$3x_1 + 4x_2 \geq 12;$ $-2x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $5x_1 + x_2 \leq 5;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $-x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $3x_1 + 3x_2 \leq 9;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1-2x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $-2x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $3x_1 + 3x_2 \leq 6;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+3x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + 4x_2 \geq 4;$ $-2x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $3x_1 + 3x_2 \leq 9;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+4x_2 \rightarrow \max$	$3x_1 + x_2 \geq 6;$ $x_1 + 4x_2 \geq 8;$ $2x_1 + x_2 \leq 8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=x_1+3x_2 \rightarrow \max$
Варіант № 26	Варіант № 27	Варіант № 28	Варіант № 29	Варіант № 30
$x_1 + x_2 \geq 4;$ $3x_1 + 4x_2 \leq 12;$ $4x_1 + 2x_2 \geq 8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1-x_2 \rightarrow \max$	$x_1 + x_2 \leq 4;$ $3x_1 + 4x_2 \leq 12;$ $4x_1 + 2x_2 \geq 8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + x_2 \geq 4;$ $4x_1 + 4x_2 \leq 12;$ $4x_1 + x_2 \geq 8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+2x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + x_2 \geq 4;$ $4x_1 + 4x_2 \leq 12;$ $4x_1 + x_2 \geq 8;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=2x_1+2x_2 \rightarrow \min$	$5x_1 + 5x_2 \geq 10;$ $4x_1 + 4x_2 \leq 8;$ $3x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ $L(X)=4x_1-3x_2 \rightarrow \max$

**Завдання II.** Для розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом скласти початкову симплекс-таблицю та виконати першу ітерацію (вираз для цільової функції та система обмежень наведені нижче).

<b>Варіант № 1</b>	<b>Варіант № 2</b>
$L = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 4$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 3</b>	<b>Варіант № 4</b>
$L = 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 5</b>	<b>Варіант № 6</b>
$L = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 7</b>	<b>Варіант № 8</b>
$L = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 9</b>	<b>Варіант № 10</b>
$L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

<b>Варіант № 11</b>	<b>Варіант № 12</b>
$L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 13</b>	<b>Варіант № 14</b>
$L = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 15</b>	<b>Варіант № 16</b>
$L = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$ приймає <b>максимальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 17</b>	<b>Варіант № 18</b>
$L = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 6$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 19</b>	<b>Варіант № 20</b>
$L = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$ (1) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2$ (2) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3$ (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

<b>Варіант № 21</b>	<b>Варіант № 22</b>
$L = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 23</b>	<b>Варіант № 24</b>
$L = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 25</b>	<b>Варіант № 26</b>
$L = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 27</b>	<b>Варіант № 28</b>
$L = -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 3 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
<b>Варіант № 29</b>	<b>Варіант № 30</b>
$L = 6x_1 - 5x_2 - x_3 - 4x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$L = 6x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4$ приймає <b>мінімальне</b> значення, за умови обмежень: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 2 \quad (1)$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 4 \quad (2)$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5 \quad (3)$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

**Завдання III.** Для транспортної задачі записати її математичну модель (вираз для цільової функції та систему обмежень) – у символічному вигляді та з урахуванням значень задачі. Для даної транспортної задачі визначити за методом «північно-західного кута» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції. Для даної транспортної задачі визначити за методом «мінімального елемента» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції. Визначити за методом потенціалів оптимальний план даної транспортної задачі та відповідне йому значення цільової функції.

Варіант	Завдання
1	На трьох складах – А, Б, В знаходиться відповідно 140, 360, 180 т пального. У пункти 1, 2, 3, 4, 5 потрібно доставити відповідно 90, 120, 230, 180, 60 т пального. Перевезення 1 т пального із складу А в пункти 1, 2, 3, 4, 5 відповідно коштує 7, 2, 8, 2, 1 грн, із складу Б в ті ж пункти – 4, 3, 1, 5, 6 грн, із складу В – 5, 2, 3, 2, 8 грн.
2	На чотирьох складах – А, Б, В і Г знаходиться відповідно 140, 250, 180, 50 т вантажу. У пункт 1 треба доставити 90 т вантажу, у пункт 2 – 120 т вантажу, у пункт 3 – 230 т вантажу, у пункт 4 – 180 т вантажу. Перевезення 1 т вантажу зі складу А в пункти 1, 2, 3, 4 відповідно коштує 7, 4, 8, 2 грн, перевезення однієї т зі складу Б в ті ж пункти – відповідно 4, 3, 1, 5 грн, зі складу В в ті ж пункти – 5, 2, 3, 2 грн, із складу Г в ті ж пункти – 3, 5, 2, 1 грн.
3	Завод має три цехи – А, В, С і п'ять складів – № 1, № 2, № 3, № 4, № 5. Цех А виробляє 30 тис. шт. виробів за місяць, цех В – 40 тис. шт., цех С – 20 тис. шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується такими показниками: склад № 1 – 20 тис. шт., склад № 2 – 30 тис. шт., склад № 3 – 10 тис. шт., склад № 4 – 10 тис. шт., склад № 5 – 20 тис. шт. Вартість перевезення 1 тис. шт. виробів з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4, № 5 відповідно рівна 2, 4, 5, 2, 3 грн, з цеху В – 4, 3, 2, 7, 6 грн, з цеху С – 5, 9, 3, 10, 8 грн.
4	У резерві п'яти залізничних станцій А, Б, В, Г, Д знаходиться відповідно 140, 250, 180, 50 і 100 вагонів. Пункту 1 навантаження необхідно 350 вагонів, пункту 2 – 130 вагонів, пункту 3 – 240 вагонів. Вартості перегонів одного вагону із станції А у вказані пункти відповідно рівні 7, 1, 8 грн, із станції Б – 4, 3, 1 грн, із станції В – 5, 2, 3 грн, із станції Г – 3, 5, 2 грн, із станції Д – 2, 6, 5 грн.
5	У чотирьох сховищах пального щодня зберігається 170, 130, 50 і 130 т бензину. Цей бензин щодня отримують чотири заправні станції в кількостях відповідно 180, 160, 60 і 80 т. Вартості перевезень 1 т бензину зі сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Варіант	Завдання
6	На п'яти складах – А, Б, В, Г, Д знаходиться 90, 120, 230, 180, 60 т пального відповідно. В пункти 1, 2, 3 треба доставити відповідно 140, 360, 180 т пального. Перевезення однієї т пального із складу А в пункти 1, 2, 3 відповідно коштує 7, 1, 8 грн, із складу Б в ті ж пункти – 4, 3, 1 грн, із складу В – 5, 2, 3 грн, із складу Г – 3, 5, 2 грн, із складу Д – 2, 6, 5 грн.
7	На трьох складах – А, Б і В знаходиться по 200 т вантажу. У пункт 1 треба доставити 160 т вантажу, в пункт 2 – 120 т вантажу, в пункт 3 – 100 т вантажу, в пункт 4 – 80 т вантажу, в пункт 5 – 140 т вантажу. Перевезення однієї т вантажу із складу А в пункти 1, 2, 3, 4, 5 відповідно коштує 4, 2, 5, 2, 3 грн, а перевезення однієї ти із складу Б в ті ж пункти – відповідно 4, 3, 2, 7, 6 грн, із складу В у ті ж пункти – відповідно 5, 9, 3, 10, 8 грн.
8	У резерві чотирьох залізничних станцій А, Б, В, Г знаходиться відповідно 60, 80, 100, 120 вагонів. Пункту 1 навантаження необхідно 40 вагонів, пункту 2 – 160 вагонів, пункту 3 – 60 вагонів і пункту 4 – 100 вагонів. Вартості перегонів одного вагону із станції А у вказані пункти відповідно рівні 9, 7, 5, 3 грн, із станції Б – 1, 2, 4, 6 грн, із станції В – 8, 10, 6, 1 грн, із станції Г – 4, 2, 3, 4 грн.
9	Завод має п'ять цехів – А, Б, В, Г, Д і три склади – № 1, № 2, № 3. Цех А виробляє 30 шт. виробів за зміну, цех Б – 40 шт., цех В – 20 шт., цех Г – 50 шт., цех Д – 60 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1– 100 шт. № 2 – 20 шт., склад № 3 – 80 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 7, 2, 4 грн, з цеху Б – 4, 3, 1 грн, з цеху В – 5, 8, 3 грн, з цеху Г – 3, 5, 9 грн, з цеху Д – 2, 6, 5 грн.
10	У трьох сховищах пального щодня зберігається 120, 200, 40 т бензину. Цей бензин щодня отримують п'ять заправних станцій в кількостях відповідно 50, 80, 100, 70, 60 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$



Варіант	Завдання
11	На чотирьох складах – А, Б, В і Г знаходиться 140, 60, 80, 120 т пального відповідно. Перевезення однієї т пального із складу А в пункти 1, 2, 3, 4 відповідно коштує 1, 2, 5, 3 грн, із складу Б в ті ж пункти – 1, 2, 4, 6 грн, із складу В – 8, 4, 6, 1 грн, із складу Г – 4, 2, 3, 7 грн. У кожен пункт треба доставити по однаковій кількості тон пального.
12	На п'яти складах – А, Б, В, Г, Д знаходиться відповідно 200, 100, 200, 300, 200 т вантажу. У пункт 1 треба доставити 400 т вантажу, в пункт 2 – 400 т вантажу, в пункт 3 – 200 т вантажу. Перевезення однієї т вантажу із складу А в пункти 1, 2, 3 відповідно стоїть 7, 2, 4 грн, перевезення однієї т із складу Б в ті ж пункти – відповідно 4, 3, 1 грн, із складу В в ті ж пункти – відповідно 5, 8, 3 грн, із складу Г в ті ж пункти – відповідно 3, 5, 9 грн, із складу Д в ті ж пункти – відповідно 2, 6, 5 грн.
13	У резерві трьох залізничних станцій А, Б, В знаходиться відповідно 350, 130 і 240 вагонів. Пункту 1 навантаження необхідно 140 вагонів, пункту 2 – 250 вагонів, пункту 3 – 180 вагонів, пункту 4 – 50 вагонів, пункту 5 – 100 вагонів. Вартості перегонів одного вагону із станції А у вказані пункти відповідно рівні 7, 1, 8, 2, 3 грн, із станції Б – 4, 3, 1, 4, 5 грн, із станції В – 5, 2, 3, 10, 6 грн.
14	Завод має чотири цехи – А, Б, В, Г і чотири склади – № 1, № 2, № 3, № 4. Цех А виробляє за добу 300 шт. виробів, цех Б – 400 шт., цех В – 200 шт., цех Г – 100 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 200 шт., склад № 2 – 300 шт., склад № 3 – 100 шт., склад № 4 – 400 шт. Вартість перевезення 1 тис. шт. виробів з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 2, 4, 5, 2 грн, з цеху Б – 4, 3, 2, 7 грн, з цеху В – 5, 9, 3, 10 грн, з цеху Г – 2, 6, 7, 4 грн.
15	У п'яти сховищах пального щодня зберігається 150, 250, 50, 150, 100 т бензину. Цей бензин щодня отримують три заправні станції в кількостях відповідно 400, 100, 200 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задається матрицею $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

Варіант	Завдання
16	На трьох складах – А, Б, В знаходиться 300, 250, 150 т пального відповідно. В пункти 1, 2, 3, 4, 5 треба доставити відповідно 100, 250, 150, 50, 150 т пального. Перевезення однієї т пального із складу А в пункти 1, 2, 3, 4, 5 відповідно коштує 7, 2, 8, 2, 1 грн, із складу Б в ті ж пункти – 4, 3, 1, 5, 6 грн, із складу В – 5, 2, 3, 2, 8 грн.
17	Завод має чотири цехи – А, Б, В, Г і чотири склади – № 1, № 2, № 3, № 4. Цех А виробляє 120 шт. виробів, цех Б – 200 шт., цех В – 280 шт., цех Г – 300 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 300 шт., склад № 2 – 100 шт., склад № 3 – 200 шт., склад № 4 – 300 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 2, 4, 5, 2 грн, з цеху Б – 4, 3, 2, 7 грн, з цеху В – 5, 9, 3, 10 грн, з цеху Г – 2, 6, 7, 4.
18	У п'яти сховищах пального щодня зберігається 150, 250, 50, 150, 100 т бензину. Цей бензин щодня отримують три заправні станції в кількостях відповідно 400, 100, 200 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$
19	Завод має три цехи – А, В, С і п'ять складів – № 1, № 2, № 3, № 4, № 5. Цех А виробляє 600 шт. виробів за добу, цех В – 700 шт., цех С – 700 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 300 шт., склад № 2 – 200 шт., склад № 3 – 400 шт., склад № 4 – 600 шт., склад № 5 – 500 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4, № 5 відповідно рівна 10, 2, 8, 2, 1 грн, з цеху В – 4, 3, 1, 5, 6 грн, з цеху С – 5, 2, 3, 2, 8 грн.
20	У чотирьох сховищах пального щодня зберігається 250, 350, 450 і 550 т бензину. Цей бензин щодня отримують чотири заправні станції в кількостях відповідно 350, 650, 150 і 450 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$

Варіант	Завдання
21	На п'яти складах – А, Б, В, Г, Д знаходиться 1200, 2400, 3000, 3600, 1800 т пального відповідно. В пункти 1, 2, 3 треба доставити відповідно 4000, 3000, 5000 т пального. Перевезення однієї т пального із складу А в пункти 1, 2, 3 відповідно коштує 1, 3, 5 грн, із складу Б в ті ж пункти – 5, 3, 1 грн, із складу В – 5, 2, 4 грн, із складу Г – 3, 5, 6 грн, із складу Д – 5, 8, 5 грн.
22	На трьох складах – А, Б і В знаходиться 2000, 2500 і 4500 кг вантажу. У пункт 1 треба доставити 1000 кг вантажу, в пункт 2 – 3000 кг вантажу, в пункт 3 – 2000 кг вантажу, в пункт 4 – 1000 кг вантажу, в пункт 5 – 2000 кг вантажу. Перевезення одного кг вантажу із складу А в пункти 1, 2, 3, 4, 5 коштує відповідно 4, 2, 8, 2, 3 грн, а перевезення одного кг із складу Б в ті ж пункти – відповідно 7, 3, 1, 5, 6 грн, із складу В в ті ж пункти – відповідно 5, 2, 3, 2, 4 грн.
23	На чотирьох автопідприємствах А, Б, В, Г знаходиться відповідно 600, 800, 1000, 1200 одиниць транспорту. Пункту 1 навантаження необхідно 400 одиниць транспорту, пункту 2 – 1600 одиниць транспорту, пункту 3 – 600 одиниць транспорту і пункту 4 – 1000 одиниць транспорту. Вартості перегонів одиниці транспорту із підприємства А у вказані пункти відповідно рівні 2, 4, 5, 2 грн, із підприємства Б – 4, 3, 2, 6 грн, із підприємства В – 5, 9, 3, 4 грн, із підприємства Г – 6, 2, 7, 4 грн.
24	Завод має п'ять цехів – А, Б, В, Г, Д і три склади – № 1, № 2, № 3. Цех А виробляє 20 шт. виробів за зміну, цех Б – 40 шт., цех В – 60 шт., цех Г – 80 шт., цех Д – 100 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1– 100 шт. № 2 – 80 шт., склад № 3 – 120 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 2, 10, 6 грн, з цеху Б – 5, 3, 2 грн, з цеху В – 5, 2, 4 грн, з цеху Г – 3, 5, 6 грн, з цеху Д – 5, 8, 5 грн.
25	У трьох сховищах пального щодня зберігається 300, 700, 1000 т бензину. Цей бензин щодня отримують п'ять заправних станцій в кількостях відповідно 200, 500, 300, 600, 400 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Варіант	Завдання
26	На чотирьох складах – А, Б, В і Г знаходиться 2000, 1500, 1000, 500 т пального відповідно. У пункти 1, 2, 3, 4 треба доставити відповідно 500, 2000, 1000, 1500 т пального. Перевезення однієї т пального із складу А в пункти 1, 2, 3, 4 відповідно коштує 2, 4, 5, 2 грн, із складу Б в ті ж пункти – 4, 3, 2, 6 грн, із складу В – 5, 9, 3, 4 грн, із складу Г – 6, 2, 7, 4 грн.
27	Завод має чотири цехи – А, Б, В, Г і чотири склади – № 1, № 2, № 3, № 4. Цех А виробляє за зміну 120 шт. виробів, цех Б – 200 шт., цех В – 280 шт., цех Г – 300 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 300 шт., склад № 2 – 100 шт., склад № 3 – 200 шт., склад № 4 – 300 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 5, 3, 1, 8 грн, з цеху Б – 4, 3, 2, 7 грн, з цеху В – 5, 9, 3, 10 грн, з цеху Г – 2, 6, 7, 4 грн.
28	У резерві трьох залізничних станцій А, Б, В знаходиться відповідно 350, 150 і 300 вагонів. Пункту 1 навантаження необхідно 200 вагонів, пункту 2 – 250 вагонів, пункту 3 – 200 вагонів, пункту 4 – 50 вагонів, пункту 5 – 100 вагонів. Вартості перегонів одного вагону із станції А у вказані пункти відповідно рівні 2, 6, 4, 3, 5 грн, із станції Б – 4, 3, 1, 4, 5 грн, із станції В – 5, 2, 3, 10, 6 грн.
29	Завод має п'ять цехів – А, Б, В, Г, Д і три склади – № 1, № 2, № 3. Цех А виробляє 20 шт. виробів за зміну, цех Б – 40 шт., цех В – 60 шт., цех Г – 80 шт., цех Д – 100 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується наступними показниками: склад № 1 – 100 шт., склад № 2 – 80 шт., склад № 3 – 120 шт. Вартість перевезення одного виробу з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно рівна 1, 5, 9 грн, з цеху Б – 5, 3, 2 грн, з цеху В – 5, 2, 4 грн, з цеху Г – 3, 5, 6 грн, з цеху Д – 5, 8, 5 грн.
30	У трьох сховищах пального щодня зберігається 300, 700, 1000 т бензину. Цей бензин щодня отримують п'ять заправних станцій в кількостях відповідно 200, 500, 300, 600, 400 т. Вартості перевезень 1 т бензину з сховищ до заправних станцій задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 10 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

**Завдання IV.** За вихідними даними побудувати сітковий графік і визначити його параметри (критичній шлях і його тривалість, ранні та пізні терміни звершення подій, резерви часу подій, ранні та пізні терміни початку та закінчення робіт, повні та вільні резерви часу робіт).

<b>Варіант № 1</b>		<b>Варіант № 2</b>		<b>Варіант № 3</b>		<b>Варіант № 4</b>		<b>Варіант № 5</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	5	1-2	3	1-2	6	1-2	10	1-2	4
1-3	5	1-3	2	1-3	5	1-3	2	1-3	3
2-4	3	2-3	4	1-4	1	2-4	3	1-5	7
3-4	7	3-4	10	2-5	8	3-4	8	2-3	5
3-5	7	4-5	4	3-5	4	3-5	4	2-4	8
4-5	4	4-6	8	3-6	3	4-6	3	3-5	6
4-6	3	5-7	8	4-6	10	5-6	5	4-7	6
5-7	6	6-8	6	5-6	6	5-7	7	5-6	5
6-8	7	7-9	7	6-7	7	6-7	7	6-8	7
7-9	3	8-9	6	6-8	6	6-8	3	7-9	4
8-9	2	9-10	3	7-9	3	7-8	9	8-9	3
9-10	9			8-9	9				

<b>Варіант № 6</b>		<b>Варіант № 7</b>		<b>Варіант № 8</b>		<b>Варіант № 9</b>		<b>Варіант № 10</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	6	1-2	3	1-2	3	1-2	6	1-2	4
1-3	4	1-3	6	1-3	11	1-3	3	2-3	9
1-4	11	2-4	11	2-4	2	2-4	9	3-4	5
2-3	7	3-4	2	3-4	7	3-5	8	4-5	6
2-6	8	3-5	9	3-5	3	4-5	4	4-6	4
3-5	3	3-6	8	4-6	3	4-6	8	4-7	8
3-7	4	4-7	5	5-7	6	5-7	4	5-8	5
4-5	9	5-6	6	6-8	2	6-8	6	6-10	6
5-8	7	6-8	5	7-8	2	7-9	7	7-9	7
6-7	6	7-9	6	7-9	5	8-9	12	8-10	6
7-8	4	8-9	5	8-9	6	9-10	3	9-10	7

<b>Варіант № 11</b>		<b>Варіант № 12</b>		<b>Варіант № 13</b>		<b>Варіант № 14</b>		<b>Варіант № 15</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	10	1-2	10	1-2	6	1-2	12	1-2	20
1-3	6	1-3	10	1-3	4	1-3	10	1-3	4
1-4	7	2-4	6	2-3	8	1-4	2	2-4	6
2-5	3	3-4	14	3-4	20	2-5	16	3-4	16
3-5	9	3-5	14	4-5	8	3-5	8	3-5	8
3-6	10	4-5	8	4-6	16	3-6	6	4-6	6
4-6	4	4-6	6	5-7	16	4-6	20	5-6	10
5-6	12	5-7	12	6-8	12	5-6	12	5-7	14
5-8	8	6-8	14	7-9	14	6-7	14	6-7	14
6-7	13	7-9	6	8-9	12	6-8	12	6-8	6
6-8	3	8-9	4	9-10	6	7-9	6	7-8	18
7-8	9	9-10	18			8-9	18		

<b>Варіант № 16</b>		<b>Варіант № 17</b>		<b>Варіант № 18</b>		<b>Варіант № 19</b>		<b>Варіант № 20</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	8	1-2	12	1-2	6	1-2	6	1-2	12
1-3	6	1-3	8	1-3	12	1-3	22	1-3	6
1-5	14	1-4	22	2-4	22	2-4	4	2-4	18
2-3	10	2-3	14	3-4	4	3-4	14	3-5	16
2-4	16	2-6	16	3-5	18	3-5	6	4-5	8
3-5	12	3-5	6	3-6	16	4-6	6	4-6	16
4-7	12	3-7	8	4-7	10	5-7	12	5-7	8
5-6	10	4-5	18	5-6	12	6-8	4	6-8	12
6-8	14	5-8	14	6-8	10	7-8	4	7-9	14
7-9	8	6-7	12	7-9	12	7-9	10	8-9	24
8-9	6	7-8	8	8-9	10	8-9	12	9-10	6

<b>Варіант № 21</b>		<b>Варіант № 22</b>		<b>Варіант № 23</b>		<b>Варіант № 24</b>		<b>Варіант № 25</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	3	1-2	5	1-2	3	1-2	4	1-2	2
1-3	5	2-3	4	1-3	4	1-3	3	1-3	3
2-4	4	2-4	8	1-4	5	2-3	2	1-4	6
3-5	6	3-4	7	2-6	7	2-4	6	2-4	5
4-6	7	4-5	6	3-5	8	3-5	5	3-4	5
5-6	5	4-6	4	4-7	10	4-6	9	4-5	4
5-7	4	4-7	15	5-8	2	5-6	7	4-6	5
6-7	2	5-8	6	6-8	4	6-7	2	5-6	8
7-8	4	6-8	9	6-9	5	6-8	4	5-7	6
7-9	5	7-9	4	7-9	9	6-9	8	6-7	7
8-9	2	8-9	5	8-10	8	7-9	6	6-8	9
				9-10	2	8-9	4	7-8	1

<b>Варіант № 26</b>		<b>Варіант № 27</b>		<b>Варіант № 28</b>		<b>Варіант № 29</b>		<b>Варіант № 30</b>	
Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів	Робота	t(i-j), днів
1-2	6	1-2	3	1-2	3	1-2	5	1-2	10
1-3	3	1-3	8	1-3	7	1-3	8	1-3	8
1-4	8	2-4	11	2-3	2	1-4	13	2-4	9
2-5	8	3-4	4	3-4	11	2-5	6	3-4	7
3-5	5	3-5	5	3-5	13	3-5	4	3-5	10
3-6	7	4-5	7	4-6	6	3-6	8	4-6	9
4-6	10	4-6	5	5-7	6	4-6	12	5-6	4
5-6	2	5-7	9	6-8	5	5-6	5	5-7	9
5-8	5	6-8	6	7-9	7	6-7	8	6-7	3
6-7	4	7-9	3	8-9	10	6-8	3	6-8	7
6-8	6	8-9	7	9-10	4	7-9	11	7-8	8
7-8	3	9-10	5			8-9	8	8-9	5

Зразок оформлення титульної сторінки

**Форма № Н-6.01**

**КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
(повне найменування вищого навчального закладу)  
**ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО**

**Транспортні технології**  
(повна назва кафедри, циклової комісії)

**КУРСОВА РОБОТА**

з навчальної дисципліни

**«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ У ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ»**  
(назва дисципліни)

**Варіант № \_\_**

Студента (ки) II курсу групи \_\_\_\_\_

спеціальності 275 «Транспортні технології  
(на автомобільному транспорті)»

\_\_\_\_\_ (прізвище та ініціали)

Керівник \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала \_\_\_\_\_

Кількість балів: \_\_\_\_\_ Оцінка: ECTS \_\_\_\_\_

Члени комісії :

\_\_\_\_\_ (підпис)

\_\_\_\_\_ (прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

\_\_\_\_\_ (прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

\_\_\_\_\_ (прізвище та ініціали)

Кременчук – 201\_ рік



## Приклад оформлення аркуша ЗМІСТ

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	
<b>ЗАВДАННЯ I</b> Розв’язання задачі лінійного програмування у транспортній галузі графоаналітичним методом.....	
<b>ЗАВДАННЯ II</b> Розв’язання задачі лінійного програмування у транспортній галузі симплекс-методом.....	
<b>ЗАВДАННЯ III</b> Розв’язання транспортної задачі .....	
3.1. Побудова математичної моделі транспортної задачі .....	
3.2. Знаходження опорних планів транспортної задачі.....	
3.3. Знаходження оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів .....	
<b>ЗАВДАННЯ IV</b> Розрахунок часових параметрів сітьової моделі транспортного процесу аналітичним способом.....	
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	
<b>ДОДАТОК А.</b> Графічна частина (розв’язки завдань) .....	

Приклад оформлення аркушів розв'язання завдань

**ДОДАТОК А**

Графічна частина (розв'язки завдань)

**Вихідні дані:** Розв'язати задачу лінійного програмування графоаналітичним методом (визначити, у яких точках цільова функція набуває екстремуму, та відповідні значення цільової функції):

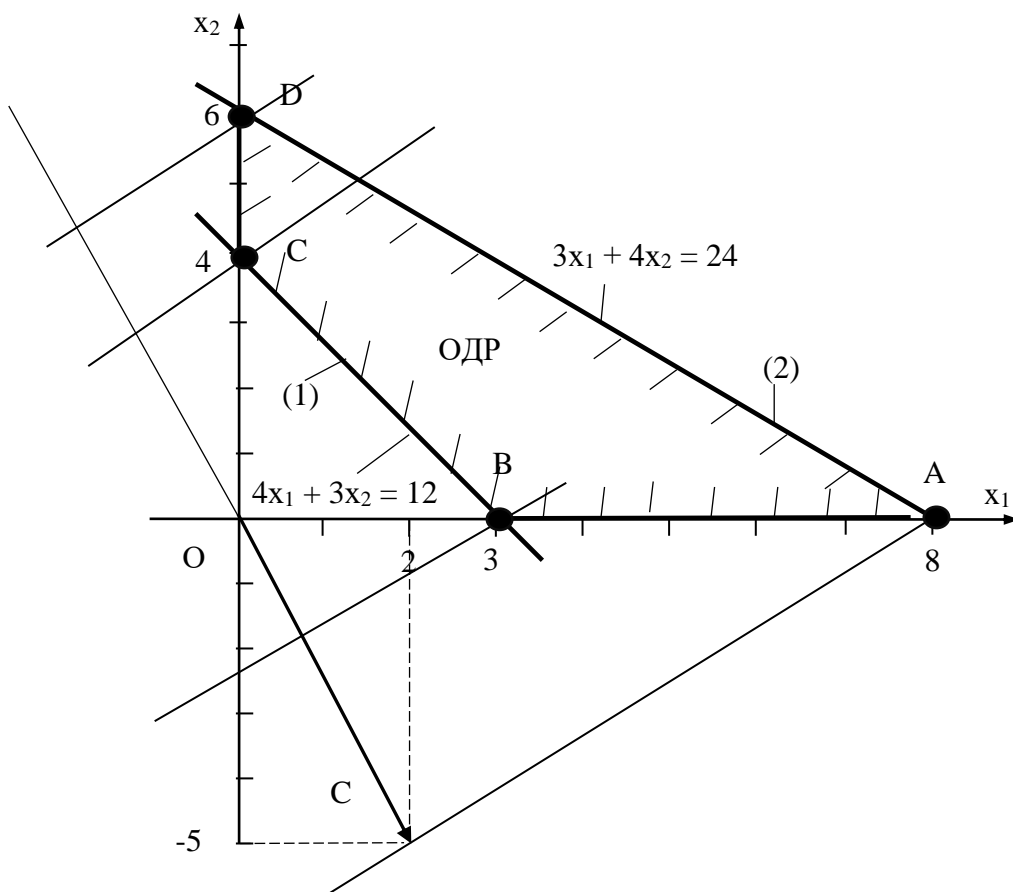
$L(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max (\min)$  – знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції при обмеженнях:

$4x_1 + 3x_2 \geq 12,$

$3x_1 + 4x_2 \leq 24,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

**Розв'язок:**



Результат розв'язку завдання графічним методом

Координати точки максимуму A: (8; 0), точки мінімуму D: (0; 6).  
 Функція набуває максимального значення (16) у точці A (8; 0),  
 функція набуває мінімального значення (-30) у точці D (0; 6).

					<b>КР ДО В ТС</b>		
Ізм.	Лист	№ докум.	Підп.	Дата			
Розроб.	Іваненко				<b>ЗАВДАННЯ І</b> Розв'язання задачі лінійного програмування у транспортній галузі графічним методом		
Перевір.	Петренко						
Н. контр.					Лім.	Лист	Листів
Затв.						1	5
					КрНУ імені Михайла Остроградського		



**Вихідні дані:** 1. Для транспортної задачі записати її математичну модель.

2. Визначити за методами «північно-західного кута» і «мінімального елемента» вихідне опорне рішення та відповідне йому значення цільової функції.

3. Визначити за методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі та відповідне йому значення цільової функції.

Завод має три цехи – А, Б, В і чотири склади № 1, № 2, № 3, № 4. Цех А виробляє за добу 300 шт. виробів, цех Б – 400 шт., цех В – 200 шт. Пропускна спроможність складів за той же час характеризується показниками: склад № 1 – 200 шт., № 2 – 300 шт., склад № 3 – 300 шт., склад № 4 – 100 шт. Вартість перевезення 1 шт. виробів з цеху А в склади № 1, № 2, № 3, № 4 відповідно дорівнює 2, 4, 3, 6 грн, із цеху Б – 3, 6, 8, 7 грн, із цеху В – 5, 10, 9, 5 грн.

**Розв'язок:**

1. Цільова функція згідно зі значеннями задачі:

$$L(X) = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23} + 7x_{24} + 5x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 5x_{34} \rightarrow \min$$

Система обмежень згідно зі значеннями задачі:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100; \end{cases}$$

$$x_{11} - x_{34} \geq 0,$$

$$x_{11} - x_{34} - \text{цілі.}$$

2. Опорний план транспортної задачі за методом «північно-західного кута»:

Склад \ Цех	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Запаси
А	200(1) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	100(2) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	300
Б	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	200(3) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	200(4) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>	400
В	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	100(5) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>	100(6) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	200
Потреби	200	300	300	100	

Значення цільової функції:  $L(X) = 2 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 200 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 5000$  грн.

					<b>КР ДО В ТС</b>		
Ізм.	Лист	№ докум.	Підп.	Дата			
Розроб.	Іваненко				<b>ЗАВДАННЯ III</b> Розв'язання транспортної задачі		
Перевір.	Петренко						
Н. контр.					Лит.	Лист	Листів
Затв.						3	5
					КрНУ імені Михайла Остроградського		

Опорний план транспортної задачі за методом «мінімального елемента»:

Склад \ Цех	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Запаси
А	200(1) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">4</span>	100(2) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">6</span>	300
Б	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	300(4) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">6</span>	100(5) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">7</span>	400
В	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">10</span>	100(6) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">9</span>	100(3) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	200
Потреби	200	300	300	100	

Значення цільової функції:  $L(X) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 4700$  грн.

3. Оптимальний план транспортної задачі за методом потенціалів:

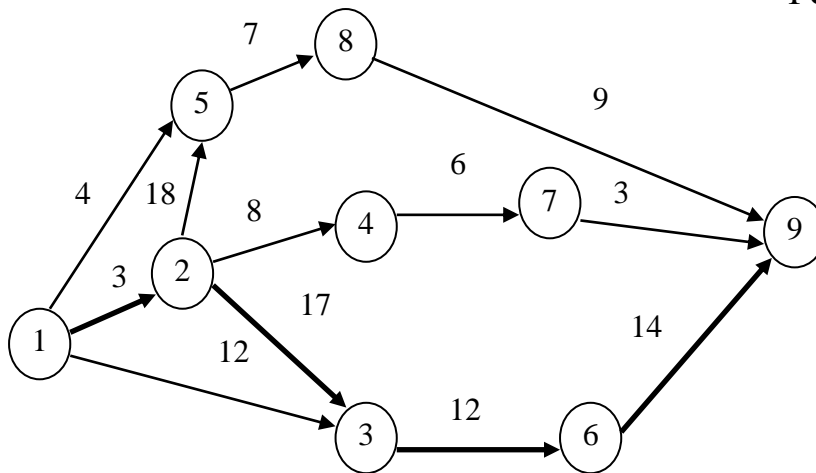
Склад \ Цех	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Запаси
А	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">4</span>	300 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">6</span>	300
Б	100 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	300 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">6</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">7</span>	400
В	100 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">9</span>	100 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	200
Потреби	200	300	300	100	

Значення цільової функції:  $L(X) = 3 \cdot 300 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 4000$  грн.

**Вихідні дані:** За вихідними даними побудувати сітковий графік і визначити його параметри (критичній шлях і його тривалість, ранні та пізні терміни звершення подій, резерви часу подій, ранні та пізні терміни початку та закінчення робіт, повні та вільні резерви часу робіт):

$t(1-2) = 3$  дні                       $t(2-3) = 17$  днів       $t(3-6) = 12$  днів                       $t(6-9) = 14$  днів  
 $t(1-3) = 12$  днів                       $t(2-4) = 8$  днів       $t(4-7) = 6$  днів                       $t(7-9) = 3$  дні  
 $t(1-5) = 4$  дні                       $t(2-5) = 18$  днів       $t(5-8) = 7$  днів                       $t(8-9) = 9$  днів

**Розв'язок:**



Сітковий графік

Результати розрахунків часових параметрів подій

Номер події	$t_p(i)$ , днів	$t_p(i)$ , днів	$R(i)$ , днів
<b>1</b>	0	0	0
<b>2</b>	3	3	0
<b>3</b>	20	20	0
<b>4</b>	11	37	26
<b>5</b>	21	30	9
<b>6</b>	32	32	0
<b>7</b>	17	43	26
<b>8</b>	28	37	9
<b>9</b>	46	46	0

Результати розрахунків часових параметрів робіт

Робота	$t(i-j)$ , днів	$t_{p.н.}$ , днів	$t_{p.о.}$ , днів	$t_{п.н.}$ , днів	$t_{п.о.}$ , днів	$R_{п.}$ , днів	$R_{с.}$ , днів
<b>1-2</b>	3	0	3	0	3	0	0
<b>1-3</b>	12	0	12	8	20	8	8
<b>1-5</b>	4	0	4	26	30	26	17
<b>2-3</b>	17	3	20	3	20	0	0
<b>2-4</b>	8	3	11	29	37	26	0
<b>2-5</b>	18	3	21	12	30	9	0
<b>3-6</b>	12	20	32	20	32	0	0
<b>4-7</b>	6	11	17	37	43	26	0
<b>5-8</b>	7	21	28	30	37	9	0
<b>6-9</b>	14	32	46	32	46	0	0
<b>7-9</b>	3	17	20	43	46	26	26
<b>8-9</b>	9	28	37	37	46	9	9