

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО–НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ І ТРАНСПОРТУ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ
ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ 275 ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ (ЗА ВИДАМИ)

КРЕМЕНЧУК 2015

Методичні вказівки щодо практичних робіт з навчальної дисципліни
«Основи теорії транспортних процесів і систем» для студентів денної та заочної
форм навчання за спеціальністю 275 Транспортні технології (за видами)

Укладач к.т.н., доц. Ю. О. Бойко

Рецензент к.т.н., доц. О. Д. Коноваленко

Кафедра транспортних технологій

Затверджено методичною радою Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського

Протокол № ____ від „__» _____ 20__ р.

Голова методичної ради _____ проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Перелік практичних робіт.....	5
Практична робота № 1 Моделі управління запасами (модель Уілсона).....	5
Практична робота № 2 Прогнозування обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі розвитку.....	9
Практична робота № 3 Прогнозування обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі «попит–пропозиція».....	16
Практична робота № 4 Розрахунок обсягу випуску за статистичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу.....	24
2. Критерії оцінювання знань.....	38
Список літератури.....	39

ВСТУП

Мета даних методичних вказівок – допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал курсу з дисципліни «Основи теорії транспортних процесів і систем» на практичних заняттях, виконуючи запропоновані завдання.

Виконання завдань являє собою розв'язання задач, що виникають у реальному транспортному процесі.

У ході виконання практичних завдань студент набуває навичок для розв'язання таких задач, а саме: визначення техніко-експлуатаційних показників роботи автомобіля для простого та суміщеного циклів перевезень, продуктивності автомобіля, собівартості перевезень, показників роботи парку автотransпортних засобів, нормування автомобільного палива, розрахунок оптимальної за вантажопідйомністю структури парку автомобільних транспортних засобів, параметрів функціонування замкнутої системи масового обслуговування, показників ефективності спільної роботи транспортних і навантажувально-розвантажувальних засобів.

За якість виконання практичних робіт у встановлений термін відповідає студент – автор роботи. Роль викладача полягає в тому, щоб допомогти студентові опанувати відповідні методики, допомогти перебороти труднощі, що виникають у роботі, указати на принципові помилки.

Оформлення звіту виконують відповідно до ГОСТ 2.105-95. При цьому необхідно вміти пояснити зміст звіту, а також відповісти на контрольні запитання. Підписаний викладачем звіт студент здає на зберігання викладачеві.

До захисту практичних робіт допускають студентів, які виконали їх якісно й у встановленому обсязі. Під час оцінювання якості роботи враховують відповідність змісту звіту встановленим вимогам, правильність виконання розрахунків, логічність обґрунтувань прийнятих рішень, грамотність текстового і графічного матеріалів, а також акуратність оформлення.

1 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Практична робота № 1

Тема роботи: Моделі управління запасами (модель Уілсона).

Мета роботи: набути навичок визначення оптимального розміру партії та визначення параметрів моделі управління запасами.

Короткі теоретичні відомості

Математичні моделі управління запасами дозволяють знайти оптимальний рівень запасів деякого товару, що мінімізує сумарні витрати на купівлю, оформлення і доставку замовлення, зберігання товару, а також збитки від його дефіциту. Модель Уілсона є простішою моделлю управління запасами й описує ситуацію закупування продукції у зовнішнього постачальника, що характеризується такими допущеннями:

- інтенсивність споживання є апріорно відомою та сталою величиною;
- замовлення доставляють зі складу, на якому зберігається вироблений раніше товар;
- час постачання замовлення є відомою й постійною величиною;
- кожне замовлення доставляється у вигляді однієї партії;
- витрати на здійснення замовлення не залежать від його розміру;
- витрати на зберігання запасів пропорційні до його розміру;
- відсутність запасу (дефіциту).

Модель Уілсона характеризується вхідними параметрами:

- 1) K – витратами на здійснення замовлення, що включають оформлення і доставку замовлення (грн);
- 2) s – витратами на зберігання запасу (грн/од. тов .од. часу);
- 3) t_d – часу доставки замовлення (од. часу).
- 4) V – обсягом товару, (од. товару).
- 5) r – інтенсивністю (швидкістю) споживання запасу (од. тов./од. часу);

$$r = \frac{P}{n},$$

де n – період, що розглядається (рік, днів);

P – загальний обсяг споживання од. товару, т.

Модель Уілсона характеризується вихідними параметрами:

1) оптимальним розміром замовлення (од. товару):

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot K}{s}}; \quad (1.1)$$

2) загальними витратами на управління запасами за одиницю часу (грн/од. часу):

$$L = \frac{K \cdot P}{q_{opt}} + \frac{s \cdot q_{opt}}{2}; \quad (1.2)$$

3) періодом поставки, тобто часом між подачами замовлення (од. часу):

$$\tau = \frac{q_{opt}}{r}; \quad (1.3)$$

4. точкою замовлення, тобто розміром запасу на складі, при якому треба подавати замовлення на доставку чергової партії (од. товару):

$$h_0 = r \cdot t_d. \quad (1.4)$$

Завдання до теми

Визначити параметри моделі управління запасами. Вихідні дані наведено в табл. 1.1 і 1.2. З табл. 1.1 вихідні дані вибирають за першою цифрою варіанта, а з табл. 1.2 – за другою. Номер варіанта студенту дає викладач.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Вихідні параметри	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Загальний обсяг спожив., т	72	61	40	50	48	55	60	45	72	69

Продовження табл. 1.1

Строки будівництва, n (діб)	10	16	15	14	12	17	13	15	19	14
-------------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Таблиця 1.2 – Вихідні дані

Вихідні параметри	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вантажопідйомність автомобіля, q (т)	4	7	5	8	7	9	6	4	3	4
Час доставки вантажу, t_d (год)	3	5	6	4	5	4	3	5	4	4
Витрати на один рейс, K (грн)	15	12	13	14	17	15	16	14	12	13
Втрати на зберігання, s (грн/доб. т.)	1,8	1,2	1,3	1,8	1,9	1,4	1,7	1,5	1,8	1,9

Приклад. Під час будівництва ділянки автошляху завдовжки 500 м використовують гравій, витрати якого становлять 120 кг/м. Строки будівництва складають 17 діб. Робота йде в одну зміну. Витрати гравію рівномірні. Гравій доставляється автомобілями вантажопідйомністю 7 тонн, протягом 4 годин. Витрати на один рейс дорівнюють 15 грн, витрати на зберігання гравію на місці будівництва складають 1,10 грн/ на добу за тонну. Визначити параметри управління запасами (оптимальний розмір партії, кількість автомобілів, інтенсивність споживання запасу, загальні витрати на управління запасами, період поставок, точку замовлення) та побудувати графік витрат на управління запасами у моделі Уільсона.

Розв'язок

Таблиця 1.3 – Вихідні дані для розрахунку

Вихідні параметри		Позначення	Значення
1	Витрати гравію, кг/м	v	120
2	Довжина ділянки автошляху, м	l	500
3	Витрати на один рейс, грн.	K	15
4	Витрати на зберігання, (грн. на добу за тонну)	s	1,1
5	Час доставки вантажу, годин	t_D	4
6	Строк будівництва, днів	n	17
7	Вантажопідйомність автомобіля, т	q	7

Оптимальний розмір замовлення:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot K}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 15}{1,1}} = 40,5 \text{ т.}$$

Кількість автомобілів при виконанні замовлення, якщо вантажопідйомність одного автомобіля 7 т:

$$A = \frac{q_{opt}}{q} = \frac{40,5}{7} = 5,8 \approx 6 \text{ шт.}$$

Інтенсивність (швидкість) споживання запасу:

$$r = \frac{P}{n} = \frac{60}{17} = 3,5 \text{ т / добу.}$$

Загальні витрати на управління запасами за одиницю часу:

$$L = \frac{K \cdot P}{q_{opt}} + \frac{s \cdot q_{opt}}{2} = \frac{15 \cdot 60}{40,5} + \frac{1,1 \cdot 40,5}{2} = 44,5 \text{ грн.}$$

Період поставки нового замовлення:

$$\tau = \frac{q_{opt}}{r} = \frac{40,5}{3,5} = 11 \text{ роб.днів.}$$

Точка замовлення на доставку чергової партії:

$$h_0 = r \cdot t_D = 3,5 \cdot 4 = 14 \text{ т.}$$

Контрольні питання

1. Які допущення необхідно прийняти для визначення моделі Уїлсона?
2. Які є вхідні параметри моделі Уїлсона?
3. Які є вихідні параметри моделі Уїлсона?
4. Що включають загальні витрати управління запасами?
5. Що таке період поставки?
6. Що таке точка замовлення?

Література: [1, с.441–473; 3, с.24–36].

Практична робота № 2

Тема роботи: прогнозування обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою «моделі розвитку»

Мета роботи: визначити прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі розвитку.

Короткі теоретичні відомості

1. Знайти вид тренду тимчасового ряду за допомогою рівняння прямої:

$$Q = a_0 + a_1 t, \quad (2.1)$$

де Q – обсяг перевезень, тис. т.;

a_0, a_1 – коефіцієнти моделі;

t – номер року, шт.

Тренд – це лінія, яка відображає тенденцію розвитку досліджуваного параметра. У нашому випадку таким параметром є обсяг перевезень автотранспортного підприємства.

Коефіцієнти a_0 і a_1 знаходяться за допомогою розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_1^n t_i = \sum_1^n Q_i \\ a_0 \sum_1^n t_i + a_1 \sum_1^n t_i^2 = \sum_1^n Q_i \cdot t_i \end{cases}, \quad (2.2)$$

де n – кількість звітних даних.

2. Знайти вид тренду тимчасового ряду за допомогою рівняння параболи:

$$S = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2, \quad (2.3)$$

де b_0, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти b_0, b_1, b_2 знаходяться за допомогою розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_1^n t_i + b_2 \sum_1^n t_i^2 = \sum_1^n Q_i \\ b_0 \sum_1^n t_i + b_1 \sum_1^n t_i^2 + b_2 \sum_1^n t_i^3 = \sum_1^n Q_i t_i \\ b_0 \sum_1^n t_i^2 + b_1 \sum_1^n t_i^3 + b_2 \sum_1^n t_i^4 = \sum_1^n Q_i t_i^2 \end{cases}, \quad (2.4)$$

Показники, необхідні для розрахунку коефіцієнтів, навести в табличному вигляді.

3. Побудувати графіки отриманих функцій в одній системі координат, тут же зазначити точки, що відповідають звітним даним.

4. Визначити середню помилку апроксимації ε для обох моделей за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sum_i^n |Q_i - Q'_i|}{n}, \quad (2.5)$$

де Q'_i – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі розвитку.

5. Розрахувати значення парних коефіцієнтів кореляції між Q і $t(r_{Q/t})$, Q і $t^2(r_{Q/t^2})$ за формулою:

$$r_{xy} = \frac{M(xy) - M(x)M(y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (2.6)$$

де x, y – досліджувані параметри;

$M(xy)$ – математичне сподівання твору xy ;

$M(x)$, $M(y)$ – середні значення x і y ;

$\sigma(x)$, $\sigma(y)$ – значення середньоквадратичного відхилення для досліджуваних величин. Показники, необхідні для розрахунку $r_{Q/t}$ і r_{Q/t^2} , навести в табличному вигляді.

6. Визначити прогнозне значення обсягу перевезень у $n+1$ року за двома моделями.

7. На підставі середньої помилки апроксимації та коефіцієнтів кореляції вибрати найбільш придатну для прогнозування модель.

8. Зробити висновки за результатами роботи.

Завдання до теми

Визначити прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою «моделі розвитку». Вихідні дані наведені в табл. 2.1 і 2.2. З табл. 2.1 вихідні дані обирають за першою цифрою варіанта, а з табл. 2.2 – за другою цифрою. Номер варіанта студенту дає викладач.

Таблиця 2.1 – Обсяг перевезень за роками (Q), тис. т

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	162	130	178	214	136	144	122	133	129	118
2	208	152	168	126	158	146	131	162	151	123
3	186	170	134	202	129	148	138	184	150	135
4	190	165	152	168	153	139	152	180	160	141
5	190	153	130	139	184	201	163	142	155	185

Таблиця 2.2 – Обсяг перевезень за роками (Q), тис. т

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	210	168	144	167	214	210	145	141	168	173
7	213	152	138	158	170	206	152	143	172	178
8	206	165	143	173	190	216	157	151	167	181
9	194	158	133	148	186	208	160	150	160	183
10	214	163	176	170	167	151	149	191	158	139

Приклад. Виконати прогноз обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою «моделі розвитку» за звітними даними, наведеними у табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Звітні дані автотранспортного підприємства

Номер року (t), шт.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обсяг перевезень (Q), тис. т	162	208	186	190	190	210	206	216	208	151

Розв'язок

1. Знайдемо значення тренда, розв'язавши рівняння (2.1).

Для цього необхідно визначити коефіцієнти a_0 , a_1 , які знаходять за допомогою вирішення системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i = \sum_{i=1}^{10} Q_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i^2 = \sum_{i=1}^{10} Q_i \cdot t_i \end{cases}$$

Систему рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10 \cdot a_0 + 55 \cdot a_1 = 1927 \\ 55 \cdot a_0 + 385 \cdot a_1 = 10658 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи будуть значення коефіцієнтів $a_0=0,7$, $a_1=188,7$, а рівняння тренду буде таким:

$$Q^{np} = 188,8 + 0,7 \cdot t.$$

Знайдемо значення обсягу перевезень за лінійною моделлю і побудуємо відповідний графік (див. рис. 2.1):

$$\begin{aligned} Q^{np}(t_1) &= 188,8 + 0,7 \cdot 1 = 189,55; & Q^{np}(t_6) &= 188,8 + 0,7 \cdot 6 = 193,05; \\ Q^{np}(t_2) &= 188,8 + 0,7 \cdot 2 = 190,25; & Q^{np}(t_7) &= 188,8 + 0,7 \cdot 7 = 193,75; \\ Q^{np}(t_3) &= 188,8 + 0,7 \cdot 3 = 190,95; & Q^{np}(t_8) &= 188,8 + 0,7 \cdot 8 = 194,45; \\ Q^{np}(t_4) &= 188,8 + 0,7 \cdot 4 = 191,65; & Q^{np}(t_9) &= 188,8 + 0,7 \cdot 9 = 195,15; \\ Q^{np}(t_5) &= 188,8 + 0,7 \cdot 5 = 192,35; & Q^{np}(t_{10}) &= 188,8 + 0,7 \cdot 10 = 195,85. \end{aligned}$$

Показники, які необхідні для розрахунку коефіцієнтів a_0 , a_1 , подамо у табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Показники для розрахунку коефіцієнтів моделі

№ пор.	Позначення показника										
	t_i	Q_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$Q_i \cdot t_i$	$Q_i \cdot t_i^2$	Q_i^{np}	$Q_i^{пар}$	$ Q_i - Q_i^{np} $	$ Q_i - Q_i^{пар} $
1	1	162	1	1	1	162	162	189,5	167,7	27,55	5,68
2	2	208	4	8	16	416	832	190,3	182,9	17,75	25,1
3	3	186	9	27	81	558	1674	190,9	194,5	4,95	8,5
4	4	190	16	64	256	760	3040	191,7	202,5	1,65	12,5
5	5	190	25	125	625	950	4750	192,3	206,8	2,35	16,8
6	6	210	36	216	1296	1260	7560	193,1	207,6	17,0	2,4
7	7	206	49	343	2401	1442	10094	193,7	204,6	12,25	1,4
8	8	216	64	512	4096	1728	13824	194,4	198,1	21,55	17,9
9	9	208	81	729	6561	1872	16848	195,1	187,9	12,85	20,1
10	10	151	100	1000	10000	1510	15100	195,8	174,1	44,85	23,1
Σ	55	1927	385	3025	25333	10658	73884	1733,7	1926,6	162,75	133,4

2. Знайдемо вид тренда, розв'язавши рівняння параболи (2.3). Згідно з формулою (2.4) визначають показники, які заносять до табл. 2.4 і використовують при складанні системи рівнянь (2.7). Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходять коефіцієнти b_0, b_1, b_2 :

$$\begin{cases} 10 \cdot b_0 + 55 \cdot b_1 + 385 \cdot b_2 = 1927 \\ 55 \cdot b_0 + 385 \cdot b_1 + 3025 \cdot b_2 = 10658 \\ 385 \cdot b_0 + 3025 \cdot b_1 + 25333 \cdot b_2 = 73884 \end{cases} .$$

Значення коефіцієнтів дорівнює $b_0=148,8; b_1=20,7; b_2=-1,82$, а рівняння тренду буде таким:

$$Q^{nap} = 148,8 + 20,7 \cdot t - 1,82 \cdot t^2.$$

Знайдемо значення обсягу перевезень за квадратичною моделлю і побудуємо відповідний графік (див. рис. 2.1):

$$Q^{nap}(t_1) = 148,8 + 20,7 \cdot 1 - 1,82 \cdot 1^2 = 167,68;$$

$$Q^{nap}(t_3) = 148,8 + 20,7 \cdot 3 - 1,82 \cdot 3^2 = 194,5;$$

$$Q^{nap}(t_4) = 148,8 + 20,7 \cdot 4 - 1,82 \cdot 4^2 = 202,5;$$

$$Q^{nap}(t_5) = 148,8 + 20,7 \cdot 5 - 1,82 \cdot 5^2 = 206,8;$$

$$Q^{nap}(t_6) = 148,8 + 20,7 \cdot 6 - 1,82 \cdot 6^2 = 207,6;$$

$$Q^{nap}(t_7) = 148,8 + 20,7 \cdot 7 - 1,82 \cdot 7^2 = 204,6;$$

$$Q^{nap}(t_8) = 148,8 + 20,7 \cdot 8 - 1,82 \cdot 8^2 = 198,1;$$

$$Q^{nap}(t_9) = 148,8 + 20,7 \cdot 9 - 1,82 \cdot 9^2 = 187,9;$$

$$Q^{nap}(t_{10}) = 148,8 + 20,7 \cdot 10 - 1,82 \cdot 10^2 = 174,1.$$

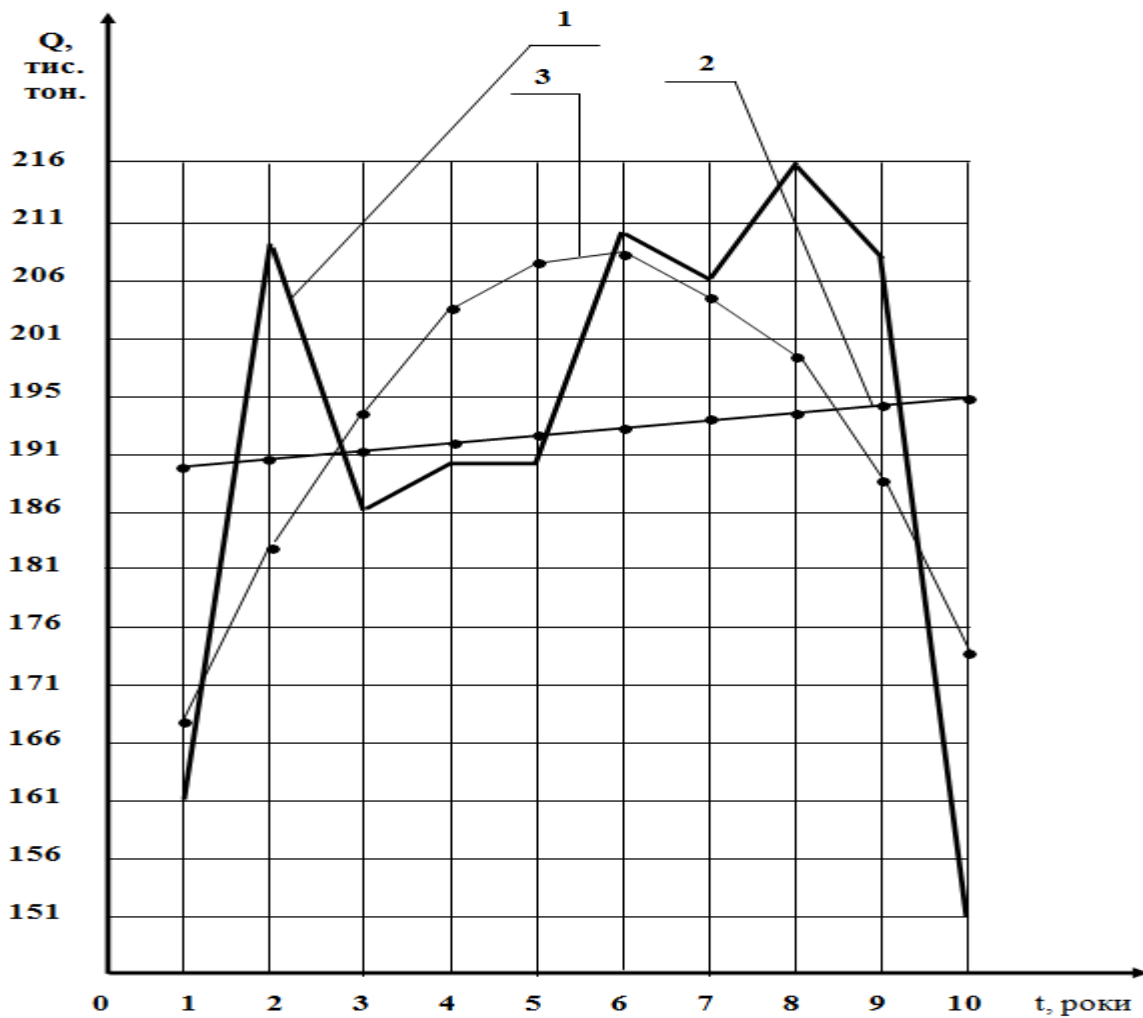
3. Визначимо середню помилку апроксимації для обох моделей за формулою (2.5):

$$\varepsilon^{np} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i''|}{10} = \frac{|162 - 189,55| + |208 - 190,25| + |186 - 190,95| + |190 - 191,65| + |190 - 192,35| + |210 - 193,05| + |206 - 193,75| + |216 - 194,45| + |186 - 190,95| + |174,1 - 190,25|}{10}$$

$$\frac{+|208 - 195,15| + |151 - 195,85|}{10} = 16,27; \quad \varepsilon^{nap} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i^n|}{10} = 13,34.$$

4. На підставі середньої помилки апроксимації беремо найбільш придатну для прогнозування модель. Цією моделлю буде та модель, яка має найменшу помилку апроксимації. Такою моделлю є параболічна функція. За квадратичною «моделлю розвитку» знайдемо прогнозне значення обсягу перевезень у $n+1$ році:

$$Q^{nap}(t_{11}) = 148,8 + 20,7 \cdot 11 - 1,82 \cdot 11^2 = 156,67 \text{ тис. т.}$$



1 – крива звітних даних; 2 – тренд прямої; 3 – тренд параболі.

Рисунок 2.1 – Графічне зображення трендів

Контрольні питання

1. Поясніть, термін «модель розвитку»?
2. Принцип математичного способу отримання трендів тимчасового ряду.
3. Як значення розміру середньої помилки апроксимації впливає на вибір моделі прогнозування?
4. Записати рівняння лінійної та квадратичної «моделі розвитку».
5. Принцип графічного способу отримання тренду моделі?
6. Що повинна вміщувати «модель розвитку»?
7. До яких регресійних моделей належить «модель розвитку»?
8. Які існують способи отримання трендів моделі розвитку?»?
9. Що таке тренд «моделі розвитку»?

Література: [1, с. 441–473; 3, с. 24–36].

Практична робота № 3

Тема роботи: Прогнозування обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі «попит-пропозиція»

Мета роботи: визначити прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі «попит-пропозиція».

Короткі теоретичні відомості

1. Знайти вид двофакторної лінійної моделі «попит – пропозиція»:

$$Q = a_0 + a_1P + a_2T, \quad (3.1)$$

де a_0 , a_2 , a_3 – коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти a_0 , a_2 , a_3 відшукати за допомогою розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n P_i + a_2 \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n Q_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n P_i + a_1 \sum_{i=1}^n P_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n P_i T_i = \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n T_i + a_1 \sum_{i=1}^n P_i T_i + a_2 \sum_{i=1}^n T_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i T_i \end{cases} \quad (3.2)$$

Показники, необхідні для розрахунку коефіцієнтів, навести в табличному вигляді.

2. Застосувати теорію кореляційного аналізу.

2.1 Розрахувати парні коефіцієнти кореляції між Q і P (r_{QP}), Q і T (r_{QT}), P і T (r_{PT}) за формулою (3.3). Розрахунки проводити в табличній формі:

$$r_{x/y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (3.3)$$

де \bar{x}, \bar{y} – середнє значення величин x та y ; σ_x, σ_y – середньоквадратичне відхилення для досліджуваних величин x та y .

Для розрахунку за формулою (3.3) застосовують вирази:

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n; \quad \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) / n; \quad \overline{x \cdot y} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right) / n \quad (3.4)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \quad (3.5)$$

Кореляційний аналіз дає можливість встановити напрямок і силу зв'язку досліджуваних величин.

Напрямок зв'язку визначають за алгебраїчним знаком коефіцієнта кореляції. Якщо він має позитивний знак – напрямок зв'язку прямий, при негативному – зворотний.

Силу зв'язку оцінюють за значенням величини коефіцієнта кореляції. При $r_{x/y} < 0,1$ немає зв'язку між параметрами, при $r_{x/y} = 0,1 - 0,19$ зв'язок вважають

слабким, при $r_{x/y} = 0,3 - 0,69$ зв'язок визначають середнім (помірним), а при $r_{x/y} = 0,7 - 0,99$ сильним.

2.2 Визначити множинний коефіцієнт кореляції за формулою:

$$R_{x/yz} = \sqrt{\frac{r_{x/y}^2 + r_{x/z}^2 - 2 \cdot r_{x/y} \cdot r_{y/z} \cdot r_{y/z}}{1 - r_{y/z}^2}}. \quad (3.6)$$

За результатами розрахунків зробити аналіз кореляційного зв'язку, який навести у висновках до роботи.

3. Визначити середню помилку апроксимації для моделі за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q_i''|}{n}, \quad (3.7)$$

де Q_i – вихідні дані обсягу перевезень i -го року, тис. т.;

Q_i'' – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі «попит – пропозиція», тис. т.

Показники, необхідні для розрахунку, навести в табличному вигляді.

4. За допомогою отриманої моделі розрахувати прогнозне значення обсягу перевезень підприємства, якщо відомо, що обсяг виробництва в прогнозованому періоді збільшився на 5 %, тобто P'' дорівнює:

$$P'' = 1,05P_{10}. \quad (3.8)$$

Тариф у прогнозованому періоді T'' залишається на рівні останнього звітного року:

$$T'' = T_{10}. \quad (3.9)$$

5. Зробити висновки за результатами аналізу кореляційного зв'язку між факторами моделі «попит – пропозиція» та перспективного обсягу перевезень.

Завдання до теми

Визначити прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі «попит – пропозиція».

Вихідними даними відповідно до заданого варіанта є: значення обсягу перевезень з 1-го завдання та обсяг виробництва в регіоні та значення тарифу за транспортну роботу, які беруть відповідно до даних, що наведені в таблицях 3.1 і 3.2. З табл. 3.1 вихідні дані вибирають за першою цифрою варіанта, з табл. 3.2 – за другою.

Таблиця 3.1 – Обсяг виробництва в регіоні (P), тис. грн

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	999	711	459	344	932	802	716	698	1919	931
2	998	763	521	402	916	805	722	691	1959	958
3	995	809	581	406	908	809	726	675	1981	975
4	989	756	639	431	905	802	728	653	1992	986
5	979	808	693	462	913	824	731	632	1996	992
6	963	842	742	463	926	833	732	616	1981	995
7	940	876	786	519	941	843	733	606	1947	996
8	909	870	825	525	955	853	734	602	1964	998
9	870	898	859	873	968	862	735	601	1934	999
10	823	921	863	583	978	859	736	600	1925	996

Таблиця 3.2 – Тариф за транспортну роботу (T), коп./ т км

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3,0	5,0	4,5	3,7	5,6	4,2	4,8	4,4	4,0	5,1
2	3,0	5,0	4,6	3,7	5,6	4,2	4,8	4,5	4,1	5,2
3	3,0	5,5	4,7	3,8	5,6	4,3	4,8	4,5	4,2	5,2
4	3,1	5,7	4,8	3,8	5,8	4,4	4,8	4,6	4,6	5,2
5	3,1	5,7	4,9	3,9	5,8	4,5	4,8	4,7	5,0	5,2
6	3,1	5,8	5,0	3,9	6,0	4,5	5,0	4,7	5,5	5,4

7	3,2	6,0	5,0	4,0	6,2	4,6	5,0	4,8	6,1	5,7
8	3,2	6,0	5,1	4,0	6,2	4,7	5,0	5,0	6,8	6,1
9	3,2	6,5	5,2	4,1	6,4	4,8	5,2	5,2	7,6	6,6
10	3,3	6,5	5,3	4,1	6,4	4,8	5,2	5,4	8,5	6,9

Приклад. Знайти прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства з використанням моделі «попит – пропозиція» за звітними даними, наведеними у табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Звітні дані автотранспортного підприємства

Номер року (t), шт.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обсяг перевезень (Q), тис. т	162	208	186	190	190	210	206	216	208	151
Обсяг виробництва (P), тис. грн	999	998	995	989	979	963	940	990	870	823
Тариф за транспортну роботу (T), коп. / т км	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8

Розв'язок

1. Знаходимо значення тренду, розв'язавши рівняння (3.1). Для цього необхідно визначити коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 . Показники, які необхідні для розрахунку коефіцієнтів подано у табл. 3.4.

Систему рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{cases} 10 \cdot a_0 + 9546 \cdot a_1 + 45 \cdot a_2 = 1927 \\ 9546 \cdot a_0 + 9145890 \cdot a_1 + 42859,9 \cdot a_2 = 1843355 \\ 45 \cdot a_0 + 42859,9 \cdot a_1 + 200,96 \cdot a_2 = 8675,8 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи будуть значення коефіцієнтів $a_0=151,4$; $a_1=0,0878$; $a_2=-9,45$, а рівняння тренду – таким:

$$Q = 151,4 + 0,088 \cdot P - 9,45 \cdot T.$$

Знаходимо значення обсягу перевезень за моделлю:

$$Q_1 = 151,4 + 0,088 \cdot 999 - 9,45 \cdot 4,2 = 198,62;$$

$$Q_2 = 151,4 + 0,088 \cdot 998 - 9,45 \cdot 4,2 = 201,53;$$

$$Q_3 = 151,4 + 0,088 \cdot 995 - 9,45 \cdot 4,3 = 197,33;$$

$$Q_4 = 151,4 + 0,088 \cdot 989 - 9,45 \cdot 4,4 = 195,86;$$

$$Q_5 = 151,4 + 0,088 \cdot 979 - 9,45 \cdot 4,5 = 194,04;$$

$$Q_6 = 151,4 + 0,088 \cdot 963 - 9,45 \cdot 4,5 = 192,65;$$

$$Q_7 = 151,4 + 0,088 \cdot 940 - 9,45 \cdot 4,6 = 189,7;$$

$$Q_8 = 151,4 + 0,088 \cdot 900 - 9,45 \cdot 4,7 = 193,11;$$

$$Q_9 = 151,4 + 0,088 \cdot 870 - 9,45 \cdot 4,8 = 181,73;$$

$$Q_{10} = 151,4 + 0,088 \cdot 823 - 9,45 \cdot 4,8 = 177,64.$$

Таблиця 3.4 – Показники для розрахунку коефіцієнтів моделі

№ року	Позначення показника									
	P	T	Q	P ²	P · T	Q · P	Q · T	T ²	Q ^M	Q _i - Q _i ^M
1	999	4,2	162	998001	4195,8	161838	680,4	17,64	213	51
2	998	4,2	208	996004	4191,6	207584	873,6	17,64	213	5
3	995	4,3	186	990025	4278,5	185070	799,8	18,49	209	23
4	989	4,4	190	978121	4351,6	187910	836	19,36	206	16
5	979	4,5	190	958441	4405,6	186010	855	20,25	200	10
6	963	4,5	210	927369	4333,5	202230	945	20,25	195	15
7	940	4,6	206	883600	4324	193640	947,6	21,16	186	20
8	990	4,7	216	980100	4653	213840	1015,2	20,09	199	17
9	870	4,8	208	756900	4176	180960	998,4	23,04	160	48
10	823	4,8	151	677329	3950,4	124273	724,8	23,04	146	5
Σ	9546	45	1927	9145890	42859,9	1843355	8675,8	200,96	1927	210

2. Розраховуємо парні коефіцієнти кореляції між Q і P (r_{QP}), Q і T (r_{QT}), P і T (r_{PT}) за формулами (3.3) – (3.5):

$$\bar{Q} = \left(\sum_{i=1}^{10} Q_i \right) / 10 = 192,7; \quad \bar{P} = \left(\sum_{i=1}^{10} P_i \right) / 10 = 954,6;$$

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (Q_i - \bar{Q})^2}{10}} = \sqrt{\frac{(162 - 192,7)^2 + (208 - 192,7)^2 + (186 - 192,7)^2 +}{10} +} \\ &\sqrt{\frac{(190 - 192,7)^2 + (190 - 192,7)^2 + (210 - 192,7)^2 + (206 - 192,7)^2 +}{10} +} \\ &\sqrt{\frac{(216 - 192,7)^2 + (208 - 192,7)^2 + (151 - 192,7)^2}{10}} = \sqrt{368,52} = 19,18; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (P_i - \bar{P})^2}{10}} = \sqrt{\frac{(999 - 954,6)^2 + (998 - 954,6)^2 + (995 - 954,6)^2 +}{10} +} \\ &\sqrt{\frac{(989 - 954,6)^2 + (979 - 954,6)^2 + (963 - 954,6)^2 + (940 - 954,6)^2 +}{10} +} \\ &\sqrt{\frac{(990 - 954,6)^2 + (870 - 954,6)^2 + (823 - 954,6)^2}{10}} = \sqrt{3327,8} = 57,68; \end{aligned}$$

$$\overline{Q \cdot P} = \left(\sum_{i=1}^n Q_i \cdot P_i \right) / 10 = 184335,5;$$

$$r_{Q/P} = \frac{\overline{Q \cdot P} - \bar{Q} \cdot \bar{P}}{\sigma_Q \cdot \sigma_P} = \frac{184335,5 - (192,7 \cdot 954,6)}{19,18 \cdot 57,68} = 0,35.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт кореляції для параметрів Q і T та P і T, які дорівнюють $r_{Q/T} = 0,099$; $r_{P/T} = -0,8$. Зробимо аналіз кореляційного зв'язку параметрів, який подано в табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Характеристика кореляційного зв'язку параметрів

Вид характеристики зв'язку	Назва параметрів		
	Q і P	Q і T	P і T
Напрямок зв'язку	прямий	прямий	зворотний
Сила зв'язку	середня	слабка	слабка

Визначимо множинний коефіцієнт кореляції за формулою (3.6):

$$R_{Q/PT} = \sqrt{\frac{r_{Q/P}^2 + r_{Q/T}^2 - 2 \cdot r_{Q/P} \cdot r_{Q/T} \cdot r_{P/T}}{1 - r_{P/T}^2}} = 0,62.$$

3. Визначимо середню помилку апроксимації для обох моделей за формулою (3.7):

$$\varepsilon^{np} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i^*|}{10} = 21.$$

4. Знайдемо за допомогою отриманої моделі прогнозне значення обсягу перевезень підприємства, якщо відомо, що обсяг виробництва в прогнозованому періоді збільшився на 5 %, а тариф у прогнозованому періоді залишається на рівні останнього звітного року:

$$P_{11} = 1,05 \cdot P_{10} = 1,05 \cdot 823 = 864,15; \quad T_{11} = T_{10} = 4,8.$$

$$Q_{11} = 151,4 + 0,088 \cdot P_{11} - 9,45 \cdot T_{11};$$

$$Q_{11} = 151,4 + 0,088 \cdot 864,15 - 9,45 \cdot 4,8 = 181,2 \text{ тис.т.}$$

5. Висновки за результатами роботи.

Контрольні питання

1. До яких регресійних моделей відносять модель «побут – пропозиція»?
2. Дати характеристику випадкам, до яких може бути зведена модель «побут – пропозиція»?
3. Дати назву й пояснити застосування математичного методу, який дозволяє отримати розв'язок моделі?

4. Пояснити у загальному вигляді послідовність отримання тренду моделі «побут – пропозиція».

5. Дати оцінку кореляційним зв'язкам між параметрами моделі P і T , T і Q , Q і P ?

6. Які можливості має кореляційний аналіз для оцінки зв'язку між досліджуваними параметрами?

Література: [1, с. 241–243; 3, с. 84–86].

Практична робота № 4

Тема роботи: розрахунок обсягу випуску за статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу

Мета роботи: перевірити ступінь освоєння питань, що викладаються в лекційному курсі за цією темою.

Короткі теоретичні відомості

1. Скласти статистичну лінійну балансову модель (СЛБМ) міжгалузевих зв'язків.

СЛБМ призначена для визначення змін валового випуску розгляненого сектору та міжсекторних потоків при різноманітних варіантах зміни потоків сектору кінцевого споживання та валового випуску інших секторів, що входять до складу моделі.

Структурними елементами моделі є сектори.

Сектор – це різні виробничі комплекси міста (регіону, держави). Кожний виробничий комплекс, як виробляє так і споживає. Сектор «Транспорт» (Т) – це сукупність усіх систем різних видів транспорту, які функціонують у місті; сектор «Паливно-енергетичний комплекс» (ПЕК) – сукупність виробництв, що забезпечують вимоги міста в енергоносіях (вугілля, нафта, газ, електроенергія); сектор «Виробництво» (В) – галузі економіки, що не включені до інших секторів.

Крім виробничих секторів модель включає ще сектор кінцевого споживання. Кінцеве споживання – це споживання, направлене не на виробництво товарів і послуг, а на задоволення вимог людей, які мешкають на території міста.

1.1 Визначити потоки сектора ПЕК, використовуючи значення поставок сектора «Транспорт». Точність розрахунків у 1-му пункті – один знак після коми:

$$x_{13} = x_{12} \cdot k_1; \quad x_{23} = x_{12} \cdot k_2; \quad x_{33} = x_{22} \cdot k_3; \quad x_{31} = x_{21} \cdot k_4; \quad x_{32} = x_{22} \cdot k_5. \quad (4.1)$$

Поставки сектору «Паливно-енергетичний комплекс» до сектору кінцевого споживання (Y_3) пов'язані залежністю:

$$Y_3 = \frac{1}{3} \cdot Y_2. \quad (4.2)$$

1.2 Розрахувати валовий випуск кожного сектора X_i за такий період:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, \quad (4.3)$$

де n – кількість секторів у розглянутій моделі;

x_{ij} – поставки i -го сектора в j -й сектор, млн. грн.;

Y_i – поставки i -го сектора в сектор кінцевого споживання, млн. грн.

1.3 Подати отримані дані у матричному вигляді, тобто записати СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & Y_1 & X_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & Y_2 & X_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & Y_3 & X_3 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

2. На підставі визначеної в попередньому пункті моделі міжгалузевих зв'язків (4.4) розрахувати матрицю коефіцієнтів прямих витрат A . Елементи матриці a_{ij} визначають за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (4.5)$$

де X_j – валовий випуск j -го сектору, млн. грн.

Точність розрахунків тут і далі – три знаки після коми. Матриця коефіцієнтів прямих витрат записують у вигляді:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . \quad (4.6)$$

3. Розрахувати матрицю коефіцієнтів повних витрат B . Для розрахунку матриці використовуємо матричну формулу:

$$B = |E - A|^{-1} , \quad (4.7)$$

де E – одинична матриця.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} , \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Вводимо позначення:

$$D = |E - A| , \quad (4.8)$$

тоді в лінійному вигляді матрицю D розраховуємо за виразом:

$$D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & 1 - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & 1 - a_{33} \end{vmatrix} . \quad (4.9)$$

Для одержання матриці B необхідно згорнути матрицю D за залежністю:

$$B = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{vmatrix}^T , \quad (4.10)$$

де $\det D$ – визначник матриці D ;

d'_{ij} – алгебраїчне доповнення ij -го елемента матриці D ;

T – означає транспоновану матрицю.

Визначник (детермінант) – це число D , утворене з n^2 чисел d_{ij} елементів, які розташовані в квадратну таблицю з n рядків і n стовбців.

Визначник можна розрахувати за правилом «Саррюса» (див. рис. 4.1).

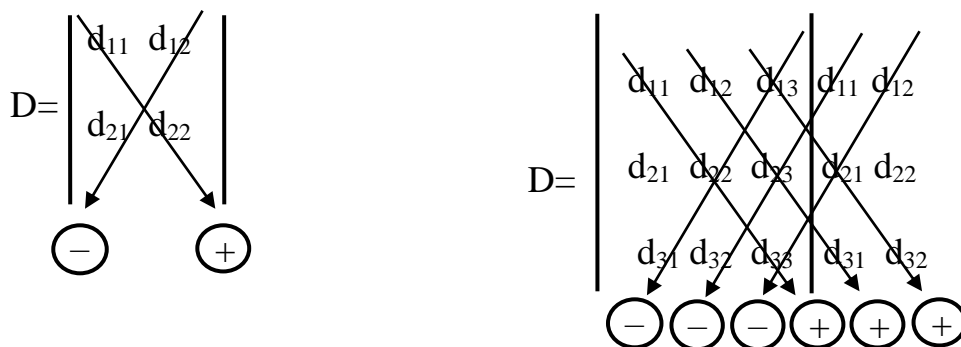


Рисунок 4.1 – Розрахунок визначника за правилом Саррюса

Для визначників другого і третього порядків формули розрахунків такі:

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \quad (4.11)$$

$$\det D = d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{13}d_{22}d_{31} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33}. \quad (4.12)$$

Точність розрахунку визначника – вісім знаків після коми.

Розрахувати значення алгебраїчних доповнень.

Алгебраїчне доповнення ij -го елемента матриці – це мінор (M_{ij}) елемента, помножений на (-1) у степені $(i+j)$.

$$d'_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{(i+j)}. \quad (4.13)$$

Мінор – це визначник під матрицею, який отримують кресленням i -го рядка і j -го стовпчика вихідної матриці.

Транспонування матриці – це таке перетворення вихідної матриці, в результаті якого рядки вихідної матриці стануть стовбцями результуючої матриці.

4. Перевірити правильність обертання матриці B .

Після отримання матриці B за (4.9) перевіряємо правильність її обертання, для чого розраховуємо матрицю K :

$$K = B \cdot D. \quad (4.14)$$

Для отримання ij -го елемента матриці K при множенні матриць B і D необхідно елементи i -го рядка матриці B помножити на відповідні елементи

j -го стовпчика матриці D . Сума цих перетворень і дасть шуканий елемент результуючої матриці.

Матриця K записуємо у вигляді:

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Потім перевіряємо рівність матриць K і E . Елементи матриць вважаються рівними, якщо різниця між ними існує тільки у третьому знаку після коми:

$$k_{ij} = e_{ij}, \text{ при } |k_{ij} - e_{ij}| < 0,01. \quad (4.16)$$

Матриці рівні між собою, якщо рівні всі їх елементи, тобто для кожної пари елементів виконується умова (4.16). Якщо $K \neq E$, перевіряється правильність розрахунку матриці B .

5. Визначити необхідні зміни валового випуску і міжсекторних потоків при зміні векторів кінцевого споживання. Наприклад, поставки сектора «Транспорт» до сектору кінцевого споживання у плановий період збільшуються на 10 %, при цьому в інших секторах змін не відбувається. Визначаємо необхідну величину поставок сектору «Транспорт» у сектор кінцевого споживання:

$$Y'_1 = 1,1 \cdot Y_1, \quad Y'_2 = Y_2, \quad Y'_3 = Y_3, \quad (4.17)$$

тут і далі апостроф позначає належність елемента до планового періоду.

Розраховуємо нове значення валового випуску трьох виробничих секторів за формулою:

$$X'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y'_j. \quad (4.18)$$

За матрицею коефіцієнтів прямих витрат A знаходимо нові значення міжсекторних потоків:

$$x'_{ij} = a_{ij} \cdot Y'_j. \quad (4.19)$$

Отримані результати рекомендується навести у вигляді матриці СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} & Y'_1 & X'_1 \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} & Y'_2 & X'_2 \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} & Y'_3 & X'_3 \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

Валовий випуск секторів і міжсекторних потоків порівнюємо з базовим варіантом матриці, яка розрахована за (4.4) для формулювання висновків. Висновки треба подати у вигляді тексту та порівняльної діаграми.

6. Визначення необхідних змін валового випуску сектору «Транспорт» при зміні векторів кінцевого споживання і валового випуску інших секторів.

Визначають величини поставок усіх секторів до сектору кінцевого споживання, а також валовий випуск секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс» за формулами:

$$Y'_1 = h_1 Y_1, \quad Y'_2 = h_2 Y_2, \quad Y'_3 = h_3 Y_3; \quad X'_2 = g_2 X_2, \quad X'_3 = g_3 X_3, \quad (4.21)$$

де h_1, h_2, h_3 – коефіцієнти відповідних секторів, що вказують на зміну векторів сектору кінцевого споживання;

g_2, g_3 – коефіцієнти, що вказують на зміну валового випуску секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс».

На підставі залежностей (4.18) і (4.22) визначають усі можливі моделі для розрахунку валового випуску сектору «Транспорт», за якими розраховують різноманітні його значення:

$$X'_i = \sum_j^n a_{ij} X'_j + Y'_i. \quad (4.22)$$

Для одержання моделей за залежністю (4.22) послідовно змінюється значення індексу i в межах від 1 до 3 і в кожному з варіантів моделі значення валового випуску сектора «Транспорт» виражається через інші змінні.

7. Зробити висновки за результатами роботи. Висновки формулюють на підставі результатів виконання пунктів 5 і 6. У пункті 5 виділяють міжсекторні потоки, які найбільшою мірою змінюються при 10-ти відсотковому збільшенні обсягу поставок сектору «Транспорт» у сектор кінцевого споживання. Пункт 6 повинен містити зміст про

можливість використання моделей для прогнозування обсягу роботи сектору «Транспорт».

Завдання до теми

Розрахувати обсяг випуску сектора «Транспорт» у прогнозованому періоді за статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу. Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведено у табл. 4.1 – 4.2.

За перший сектор у моделі беруть сектор «Транспорт», за другий «Виробництво», за третій – «Паливно-енергетичний комплекс». Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведені у табл. 4.1, 4.2 та 4.3.

Кожний студент отримує тризначний номер варіанта і вибирає вихідні дані згідно з правилом: перша цифра варіанта вказує на номер варіанта з табл. 4.1, друга – на номер варіанта з табл. 4.2 і третя – з табл. 4.3.

Таблиця 4.1 – Потоки сектора «Транспорт», млн. грн

Назва потоку	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Власне споживання сектору «Транспорт» (X_{11})	89	83	178	267	56	145	59	123	72	181
Поставки сектору «Транспорт» у сектор «Виробництво» (X_{12})	3560	2759	4628	5607	4806	5785	4094	5016	3240	4410
Поставки сектору «Транспорт» у сектор кінцевого споживання (Y_1)	2670	3649	3738	4717	3916	4895	4183	5121	3330	4320

Таблиця 4.2 – Потоків сектора «Виробництво», млн. грн

Назва потоку	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Поставки сектору «Виробництво» у сектор «Транспорт» (X_{21})	680	285	570	312	331	708	349	726	288	576
Власне споживання сектору «Виробництво» (X_{22})	27603	23772	44784	84048	24262	46164	64416	86348	66813	64836
Поставки сектору «Виробництво» у сектор кінцевого споживання (Y_2)	46005	46925	38646	49685	51526	52444	53366	85428	34743	63906

Таблиця 4.3 – Значення коефіцієнтів для розрахунку потоків секторів

Коефіцієнт	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	2/3	1/3	1	1/4	2/3	3/4	1	3/4	1/3	2/3
k_2	2/3	1/4	1/3	1	1	3/4	1/3	1	1/4	2/3
k_3	1/2	1	1/3	3/4	1/4	1/2	3/4	1/3	1/5	1/2
k_4	3	4	5	2	1	3	2	4	5	3
k_5	3/4	1/5	1/4	2/3	1/3	1	1/4	1/5	3/4	1/2
h_1	1,03	1,07	0,95	1,16	1,10	1,15	0,89	0,96	1,03	0,85
h_2	0,85	0,95	1,05	1,06	1,10	1,19	0,91	0,86	1,04	1,00
h_3	1,00	1,02	1,05	1,03	1,00	1,00	1,01	1,08	1,00	1,00
g_2	1,02	1,05	1,03	1,08	1,00	1,02	1,00	1,09	1,12	1,10
g_3	1,06	1,00	1,08	1,07	1,00	0,89	0,93	1,00	0,82	1,00

Приклад. Розрахувати обсяг випуску сектору «Транспорт» у прогнозованому періоді за статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу. Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведено в табл. 4.4 – 4.5.

Таблиця 4.4 – Значення потоків секторів, млн. грн

Назва потоків сектору «Транспорт»			Назва потоків сектору «Виробництво»		
Власне споживання (x_{11})	Поставки до сектору «Виробництво» (x_{12})	Поставки до сектору кінцевого споживання (Y_1)	Поставки до сектору «Транспорт» (x_{21})	Власне споживання (x_{22})	Поставки до сектору кінцевого споживання (Y_2)
56	4806	3916	680	27603	46005

Таблиця 4.5 – Значення коефіцієнтів для розрахунку потоків секторів

Позначення коефіцієнта									
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	h_1	h_2	h_3	g_2	g_3
2/3	2/3	1/2	2	3/4	1,03	0,85	1,00	1,02	1,06

Розв'язок

1. Складемо статистичну лінійну балансову модель міжгалузевих зв'язків.

1.1 Використовуючи формули (4.1) і (4.2), визначимо потоки сектора ПЕК.

$$x_{13} = x_{12} \cdot 2/3 = 4806 \cdot 2/3 = 3204 \text{ млн. грн};$$

$$x_{23} = x_{12} \cdot 2/3 = 27603 \cdot 2/3 = 18402 \text{ млн. грн};$$

$$x_{33} = x_{22} \cdot 1/2 = 27603 \cdot 1/2 = 13802 \text{ млн. грн};$$

$$x_{31} = x_{21} \cdot 2 = 680 \cdot 2 = 1360 \text{ млн. грн};$$

$$x_{32} = x_{22} \cdot 3/4 = 27603 \cdot 3/4 = 20702 \text{ млн. грн};$$

$$Y_3 = 1/3 \cdot Y_2 = 1/3 \cdot 46005 = 15335 \text{ млн. грн}.$$

1.2 Розрахуємо валовий випуск кожного сектору X_i за наступний період за формулою (4.3):

$$X_1 = \sum_{j=1}^n x_{1j} + Y_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + Y_1 = 56 + 4806 + 3204 + 3916 = 11982 \text{ млн. грн.};$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + Y_2 = 680 + 27603 + 18402 + 46005 = 92690 \text{ млн. грн.};$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + Y_3 = 1360 + 20702 + 15802 + 15335 = 51199 \text{ млн. грн.}$$

Отримані дані записуємо в матричному вигляді, тобто складаємо СЛБМ:

$$\begin{pmatrix} 56 & 4806 & 3204 & 3916 & 11982 \\ 680 & 27603 & 18402 & 46005 & 92690 \\ 1360 & 20702 & 13802 & 15335 & 51199 \end{pmatrix}.$$

2. Визначимо валовий випуск секторів із застосуванням СЛБМ.

2.1 На підставі визначеної в попередньому пункті моделі міжгалузевих зв'язків і, використовуючи формулу (4.5), розрахуємо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A :

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{56}{11982} = 0,005; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{4806}{92690} = 0,052; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{3204}{51199} = 0,063;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{680}{11982} = 0,057; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{27603}{92690} = 0,298; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{18402}{51199} = 0,359;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{1360}{11982} = 0,114; \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{20702}{92690} = 0,223; \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{13802}{51199} = 0,270.$$

Матриця коефіцієнтів прямих витрат має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,052 & 0,063 \\ 0,057 & 0,298 & 0,359 \\ 0,114 & 0,223 & 0,270 \end{pmatrix}.$$

2.2 Визначимо матрицю коефіцієнтів повних витрат B . Використовуючи формули (4.8), (4.9), розрахуємо матрицю D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 - 0,005 & 0 - 0,052 & 0 - 0,063 \\ 0 - 0,057 & 1 - 0,298 & 0 - 0,359 \\ 0 - 0,114 & 0 - 0,223 & 1 - 0,270 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,995 & -0,052 & -0,063 \\ -0,057 & 0,702 & -0,359 \\ -0,114 & -0,223 & 0,730 \end{vmatrix}.$$

Після розрахунку матриці D проведемо її обертання за формулою (4.10), при цьому необхідно використати формули (4.12), (4.13):

$$\begin{aligned} \det D &= d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{31} - d_{13}d_{22}d_{31} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33} = \\ &= [0,995 \cdot 0,702 \cdot 0,73] + [(-0,052) \cdot (-0,359) \cdot (-0,114)] + \\ &+ [(-0,063) \cdot (-0,057) \cdot (-0,223)] - [(-0,063) \cdot 0,702 \cdot (-0,114)] - \\ &- [0,995 \cdot (-0,359) \cdot (-0,223)] - [(-0,052) \cdot (-0,057) \cdot 0,73] = 0,421. \end{aligned}$$

Визначимо алгебраїчне доповнення елементів матриці D . Наприклад, для визначення елемента d'_{11} креслемо перший рядок і перший стовпчик з матриці D , а елементи, що залишилися, утворять шукану субматрицю, яку множимо на (-1) у степені $(l+1)$:

$$\begin{aligned} d'_{11} &= M_{11} \cdot (-1)^{(1+1)} = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+1)} = [(d_{22} \cdot d_{33} - d_{23} \cdot d_{32})] \cdot (-1)^2 = [(0,702 \cdot 0,73) - \\ &- (-0,359) \cdot (-0,223)] \cdot (-1)^2 = 0,432. \end{aligned}$$

Матриця B має такий вигляд:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\det D} \cdot \begin{vmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{vmatrix}^T = \frac{1}{0,420} \cdot \begin{vmatrix} 0,432 & 0,083 & 0,093 \\ 0,052 & 0,719 & 0,228 \\ 0,063 & 0,360 & 0,696 \end{vmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{0,420} \cdot \begin{vmatrix} 0,432 & 0,052 & 0,063 \\ 0,083 & 0,719 & 0,360 \\ 0,093 & 0,228 & 0,696 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,028 & 0,124 & 0,150 \\ 0,198 & 1,711 & 0,857 \\ 0,221 & 0,542 & 1,656 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Перевіримо правильність обертання матриці B . Для цього розрахуємо матрицю K . Наприклад, для перших елементів матриці K маємо:

$$k_{11} = 1,028 \cdot 0,995 + 0,124 \cdot (-0,057) + 0,15 \cdot (-0,114) = 1,023 - 0,024 = 0,999;$$

$$k_{12} = 1,028 \cdot (-0,005) + 0,124 \cdot 0,702 + 0,15 \cdot (-0,223) = -0,053 + 0,087 - 0,033 = 0,001.$$

$$K = \begin{vmatrix} 0,999 & 0,0001 & 0,000 \\ 0,001 & 1,0000 & 0,0003 \\ 0,0001 & 0,0004 & 1,000 \end{vmatrix}.$$

Різниця між елементами матриць K і E задовольняє вимозі (4.16), тому матриця B розрахована правильно.

3. Визначимо зміни валового випуску і міжсекторних потоків при зміні векторів кінцевого споживання.

У перспективному періоді збільшуються на 10 % поставки сектору «Транспорт» до сектору кінцевого споживання, при цьому в інших секторах змін не відбуваються:

$$Y_1' = 1,1 \cdot Y_1 = 1,1 \cdot 3916 = 4307,6 \text{ млн. грн}, Y_2' = Y_2 = 46005 \text{ млн. грн}, \\ Y_3' = Y_3 = 15335 \text{ млн. грн}.$$

Розрахуємо нове значення валового випуску трьох виробничих секторів використовуючи формулу (4.18):

$$X_1' = b_{11} \cdot Y_1' + b_{12} \cdot Y_2' + b_{13} \cdot Y_3' = 1,028 \cdot 4307,6 + 0,124 \cdot 46005 + 0,15 \cdot 15335 = \\ = 12433 \text{ млн. грн},$$

$$X_2' = b_{21} \cdot Y_1' + b_{22} \cdot Y_2' + b_{23} \cdot Y_3' = 0,198 \cdot 4307,6 + 1,711 \cdot 46005 + 0,857 \cdot 15335 = \\ = 92709,5 \text{ млн. грн},$$

$$X_3' = b_{31} \cdot Y_1' + b_{32} \cdot Y_2' + b_{33} \cdot Y_3' = 0,221 \cdot 4307,6 + 0,542 \cdot 46005 + 1,656 \cdot 15335 = \\ = 51281 \text{ млн. грн}.$$

З використанням матриці коефіцієнтів прямих витрат A знайдемо нові значення міжсекторних потоків, наприклад:

$$x_{11}' = a_{11} \cdot Y_1' = 0,005 \cdot 12433 = 62,165 \text{ млн. грн},$$

$$x_{12}' = a_{12} \cdot Y_2' = 0,052 \cdot 92709,5 = 4820,9 \text{ млн. грн}.$$

Отримані результати наведено у вигляді матриці СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} & Y'_1 & X'_1 \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} & Y'_2 & X'_2 \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} & Y'_3 & X'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62,165 & 4820,9 & 3230,7 & 4307,6 & 12433 \\ 708,681 & 27627,43 & 18410 & 46005 & 92709,5 \\ 1417,362 & 20674,218 & 13845,87 & 15335 & 51281 \end{vmatrix}.$$

Валовий випуск секторів і міжсекторних потоків порівнюють з базовим варіантом матриці, що розрахована за (4.4). Наприклад, $x_{11} = 56$ млн. грн, $x'_{11} = 62,165$ млн. грн, тобто власне споживання сектору «Т» збільшилось на 11 %; $x_{33} = 15335$ млн. грн, $x'_{33} = 13845,87$ млн. грн, тобто власне споживання сектора «ТЕК» зменшилось на 9,71 %. Висновки у вигляді тексту та порівняльної діаграми навести в пункті 5.

4. Визначимо зміни валового випуску сектору «Транспорт» при зміні векторів кінцевого споживання і валового випуску секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс»:

$$Y'_1 = h_1 \cdot Y_1 = 1,03 \cdot 3916 = 4033,5 \text{ млн. грн}; Y'_2 = h_2 \cdot Y_2 = 0,85 \cdot 46005 = 39104,3 \text{ млн. грн}; Y'_3 = h_3 \cdot Y_3 = 1,0 \cdot 15335 = 15335 \text{ млн. грн}; X'_2 = g_2 \cdot X_2 = 1,02 \cdot 92690 = 94543,8 \text{ млн. грн}; X'_3 = g_3 \cdot X_3 = 1,06 \cdot 51199 = 54271 \text{ млн. грн}.$$

Використовуючи залежність (4.18), визначимо валовий випуск сектору «Т» на перспективний період при зміні поставок до сектору кінцевого споживання:

$$X'_1 = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot Y'_j = b_{11} \cdot Y'_1 + b_{12} \cdot Y'_2 + b_{13} \cdot Y'_3 = 1,028 \cdot 4033,5 + 0,124 \cdot 39104,3 + 0,15 \cdot 15335 = 11295,6 \text{ млн. грн}.$$

На підставі виразу (4.22) визначимо всі можливі моделі для розрахунку валового випуску сектору «Транспорт». Для одержання моделей за залежністю (4.22) послідовно змінюємо значення індексу i у межах від 1 до 3:

$$X'_1 = \sum_j^n a_{ij} X'_j + Y'_i = a_{11} \cdot X'_1 + a_{12} \cdot X'_2 + a_{13} \cdot X'_3 + Y'_1 = 0,005 \cdot 11295,6 +$$

$$+ 0,052 \cdot 945438 + 0,063 \cdot 54271 + 4033,5 = 12425,3 \text{ млн. грн};$$

$$X'_1 = \sum_j^n a_{ij} X'_j + Y'_i = a_{21} \cdot X'_1 + a_{22} \cdot X'_2 + a_{23} \cdot X'_3 + Y'_1 = 0,057 \cdot 11295,6 +$$

$$+ 0,298 \cdot 945438 + 0,359 \cdot 54271 + 39104,3 = 87405 \text{ млн. грн};$$

$$X'_1 = \sum_j^n a_{ij} X'_j + Y'_i = a_{31} \cdot X'_1 + a_{32} \cdot X'_2 + a_{33} \cdot X'_3 + Y'_1 = 0,114 \cdot 11295,6 +$$

$$+ 0,223 \cdot 945438 + 0,27 \cdot 54271 + 15335 = 52359 \text{ млн. грн}.$$

Для кожного з варіантів моделі значення валового випуску сектору «Транспорт» зробити висновки щодо можливості використання моделей для прогнозування обсягу роботи сектору та навести їх у пункті 5.

5. Висновки за результатами роботи.

Контрольні питання

1. Для чого призначена СЛБМ?
2. Дати визначення сектора СЛБМ. Які сектори застосовані в моделі?
3. Обґрунтувати, чому модель міжгалузевих зв'язків називають статистичною?
4. Навести загальну структуру СЛБМ у графічному, табличному й матричному виглядах.
5. Як визначити за моделлю міжгалузевих зв'язків зміни сектора «Т» при зміні поставок у сектор кінцевого споживання та потоків інших секторів.
6. В якій послідовності виконують у моделі прогнозування розвитку транспортної системи?
7. Який сенс має матриця коефіцієнтів прямих витрат при розрахунку потоків?
8. Яким принципом треба керуватися при впорядкуванні матриці міжсекторних потоків.
9. Як виконують обертання матриць та перевірку обертання матриць?
10. Як виконують трансформування матриць? Навести приклади.
11. Що таке мінор матриці? Як його визначити?

12. Що таке алгебраїчне доповнення елемента матриці? Навести приклади.

13. Що таке визначник? Яким чином розраховують визначник другого, третього, четвертого порядків? Навести приклад у загальному вигляді.

14. Виконання, якої умови свідчить про рівність матриць?

Література: [1, с. 247–283; 3, с. 184–189].

2. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТЕДЕНТІВ

Критерії оцінювання знань з дисципліни «Основи теорії транспортних процесів і систем».

Вид занять	Бали	Складові контролю
Лекції	10	1) відвідування лекцій; 2) наявність конспекту;
Поточна робота студента в семестрі	20	1) контрольні роботи на заняттях; 5) активність на практичних заняттях;
Робота студента на практичних заняттях	30	1) відвідування; 2) підготовка до занять; 3) виконання самостійної роботи; 4) захист самостійної роботи;
Поточний контроль, який проводиться згідно зі змістовими модулями за робочою програмою	30	1) Модульний контроль №1, 2) Модульний контроль №2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачев П. Ф. Основы теории транспортных систем : учебное пособие / П. Ф. Горбачев, И. А. Дмитриев. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2002. – 202 с.
2. Воркут А. И. Грузовые автомобильные перевозки / А. И. Воркут. – К. : Вища школа, 1986. – 447 с.
3. Гудков В. А. Пассажирские автомобильные перевозки : учебник для вузов / В. А. Гудков, Л. Б. Миротин, А. В. Вельможин, С. А. Ширяев ; под. ред. В. А. Гудкова. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 448 с.
4. Афанасьев Л. Л. Единая транспортная система и автомобильные перевозки: учебник для студентов вузов / Л. Л. Афанасьев: – М. : Транспорт, 1984. – 333 с.
5. Богацкий Г. Ф. Городские улицы и городское движение / Г. Ф. Богацкий – К. : Будівельник, 1967. – 304 с.
6. Автомобильные перевозки и организация дорожного движения : справочник. – М. : Транспорт, 1981. – 592 с.
7. Грановский Б. И. Моделирование пассажирских потоков в транспортных системах / Б. И. Грановский [Автомобильный и городской транспорт] (итоги науки и техники ВНИИТН). – М. : ВИНИТН, 1986. – 106 с.